UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Análisis Matemático

Algunas cuestiones sobre índice numérico

Miguel Martín Suárez

Rango numérico de un operador

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

$$W(T) = \{(Tx|x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1\}$$

(Toeplitz, 1918)

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\}$$

(Lumer, 1961; Bauer, 1962)

Radio numérico

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\}$$

v es una seminorma continua:

$$v(T) \leq \|T\|$$

Índice numérico de un espacio de Banach

X espacio de Banach,

$$\begin{aligned} n(X) &= \max\{k \geq 0 \ : \ k\|T\| \leq v(T) \quad \forall T \in L(X)\} \\ &= \inf\{v(T) \ : \ T \in L(X), \ \|T\| = 1\} \end{aligned}$$

$$0 \leq n(X) \leq 1$$

Índice numérico de un espacio de Banach

$$n(X^*) \leq n(X)$$

¿ $n(X^*) = n(X)$?

Respuesta parcial:

PROPOSICIÓN

X Banach <u>real</u> con RNP.

$$n(X) = 1 \quad \Rightarrow \quad n(X^*) = 1$$

H espacio de Hilbert, $\dim(H) > 1$

$$\begin{array}{ll} n(H) = 0 & \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) = 1/2 & \text{si } H \text{ es complejo} \end{array}$$

X Banach complejo $\Rightarrow$ $n(X) \geq 1/e$

(Bohnenblust-Karlin, 1955; Glickfeld, 1970)

$$\{n(X) \ : \ X \text{ complejo}, \ \dim(X) = 2\} = [e^{-1}, 1]$$
$$\{n(X) \ : \ X \text{ real}, \ \dim(X) = 2\} = [0, 1]$$

(Duncan-McGregor-Pryce-White, 1970)

Ejemplos "Clásicos"

□ H Hilbert, $\dim(H) > 1$, $n(H) = \begin{cases} 0 & \text{caso real} \\ 1/2 & \text{caso complejo} \end{cases}$

□ $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 \quad \mu$ medida positiva

$X^* \equiv L_1(\mu) \quad \Rightarrow \quad n(X) = 1$

En particular, $n\big(C(K)\big) = 1 \quad K$ espacio compacto de Hausdorff

(Duncan-McGregor-Pryce-White, 1970)

- $\square$ $A(\mathbb{D})$ álgebra del disco $\Rightarrow$ $n\big(A(\mathbb{D})\big) = 1$

  (Crabb-Duncan-McGregor, 1972)

- $\square$ ¿ $n(l_p), \quad p \neq 1, 2, \infty$?

Primera parte

Espacios de funciones con valores vectoriales

(Martín-Payá, 2000; Martín-Villena, preprint)

• "Sumas" de espacios de Banach

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia de espacios de Banach,

$$\left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{c_0} \qquad \left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{l_1} \qquad \left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{l_\infty}$$

Proposición

$$\begin{aligned} n\Big(\left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{c_0}\Big) &= n\Big(\left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{l_1}\Big) \\ &= n\Big(\left[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right]_{l_\infty}\Big) = \operatorname*{\acute{\imath}nf}_{\lambda}\, n(X_\lambda) \end{aligned}$$

Consecuencias

☐ La clase de espacios de Banach con índice numérico 1 es estable por c_0, l_1 y l_∞ sumas.

☐ X espacio de Banach:

$$n(X) = n\big(c_0(X)\big) = n\big(l_1(X)\big) = n\big(l_\infty(X)\big)$$

☐ Existe un espacio de Banach real X, tal que

$$v(T) > 0 \qquad \forall T \in L(X) \setminus \{0\},$$

pero $n(X) = 0$

□ *Caso real:*

Para cada $t \in [0,1]$ existe X_t isomorfo a c_0 (o l_1 o l_∞) con $n(X_t) = t$

Caso complejo:

Para cada $s \in [e^{-1},1]$ existe X_s isomorfo a c_0 (o l_1 o l_∞) con $n(X_s) = s$

• Espacios de funciones con valores vectoriales

X espacio de Banach, K compacto de Hausdorff, μ medida positiva:

$$C(K, X) \qquad\qquad L_1(\mu, X) \qquad\qquad L_\infty(\mu, X)$$

Teorema

$$n\Big(C(K, X)\Big) = n\Big(L_1(\mu, X)\Big) = n\Big(L_\infty(\mu, X)\Big) = n(X)$$

Productos tensoriales

$$C(K,X) = C(K)\widetilde{\otimes}_\varepsilon X$$

$$L_1(\mu,X) = L_1(\mu)\widetilde{\otimes}_\pi X$$

X, Y espacios de Banach:

$$¿\ n\big(X\widetilde{\otimes}_\varepsilon Y\big) = f\big(n(X), n(Y)\big)\ ?$$

$$¿\ n\big(X\widetilde{\otimes}_\pi Y\big) = g\big(n(X), n(Y)\big)\ ?$$

NO: Ejemplo

$$n\left(l_1^4 \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_1^4\right) < 1 = n\left(l_\infty^4 \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_\infty^4\right)$$

$$n\left(l_\infty^4 \widetilde{\otimes}_\pi l_\infty^4\right) < 1 = n\left(l_1^4 \widetilde{\otimes}_\pi l_1^4\right)$$

(Lima, 1981)

Segunda parte

Índice numérico y renormación

(Finet-Martín-Payá, preprint)

• El conjunto $\mathcal{N}(X)$

Definimos el *conjunto índice numérico* como

$$\mathcal{N}(X) = \{n(Y) \ : \ Y \text{ isomorfo a } X\}$$

Ejemplos

□ $\mathcal{N}(\mathbb{R}) = \mathcal{N}(\mathbb{C}) = \{1\}$,

□ $\mathcal{N}\big(\mathbb{R}^m\big) = [0,1], \quad \mathcal{N}\big(\mathbb{C}^m\big) = [e^{-1},1] \qquad (m>1)$

(Duncan et al, 1970; Tillekeratne, 1974)

$$\square\ \mathcal{N}(c_0) = \mathcal{N}(l_1) = \mathcal{N}(l_\infty) = \begin{cases} [0,1] & \text{caso real} \\ [e^{-1},1] & \text{caso complejo} \end{cases}$$

(Martín-Payá, 2000)

X espacio de Banach, $\dim(X) = \infty$, ¿ $\mathcal{N}(X)$?

Resultados negativos:

□ X real, $\dim(X) = \infty$, RNP, $n(X) = 1$
$\Rightarrow \; X \supset l_1$

□ X espacio de Asplund real, $\dim(X) = \infty$, $n(X) = 1$
$\Rightarrow \; X^* \supset l_1$

□ X real, $\dim(X) = \infty$, $n(X) = 1$
$\Rightarrow \; X^{**}/X$ no es separable

(López-Martín-Payá, 1999)

Resultados positivos:

PROPOSICIÓN

(I) X real $\Rightarrow$ $0 \in \mathcal{N}(X)$
(II) X complejo $\Rightarrow$ $e^{-1} \in \mathcal{N}(X)$

PROPOSICIÓN

$\mathcal{N}(X)$ es un intervalo

COROLARIO

$$1 \in \mathcal{N}(X) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}(X) = \begin{cases} [0,1] & \text{caso real} \\ [e^{-1},1] & \text{caso complejo} \end{cases}$$

Dos cuestiones:

- $\square$ ¿ Es $\mathcal{N}(X)$ un intervalo no trivial ?
- $\square$ ¿ $\sup \mathcal{N}(X) = 1$?

Las propiedades (α) y (β)

X tiene la propiedad (α) con constante $\rho \quad (0 \leq \rho < 1)$
si existe una familia $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I} \subset X \times X^*$ tal que

$$(i) \quad \|x_i\| = \|x_i^*\| = x_i^*(x_i) = 1 \qquad (i \in I)$$

$$(ii) \quad |x_i^*(x_j)| \leq \rho \qquad (i \neq j)$$

$$(iii)_\alpha \quad \|x^*\| = \sup\{|x^*(x_i)| \ : \ i \in I\} \qquad (x^* \in X^*)$$

Si la familia $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ satisface (i), (ii) y

$$(iii)_\beta \quad \|x\| = \sup\{|x_i^*(x)| \ : \ i \in I\} \qquad (x \in X)$$

entonces X tiene la propiedad (β) con constante ρ

Proposición

X verificando (α) o (β) con constante ρ

Si X es real, entonces $n(X) \geq \dfrac{1-\rho}{1+\rho}$

Si X es complejo, entonces $n(X) \geq 1-\rho$

Partington 1982:

Todo espacio de Banach puede renormarse para que tenga la propiedad (β) con cualquier constante $\rho \in (1/2, 1)$

Teorema

X Banach real $\;\Rightarrow\; \mathcal{N}(X) \supseteq [0, 1/3)$

X Banach complejo $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(X) \supseteq [e^{-1}, 1/2)$

Schachermayer 1983; Godun-Troyanski 1993:

Los espacios de Banach que tienen “sistema biortogonal largo” admiten normas equivalentes verificando la propiedad (α) con cualquier constante $\rho \in (0,1)$

TEOREMA

X Banach con “sistema biortogonal largo”
(en particular, X separable o reflexivo o WCG)

X real $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(X) \supseteq [0,1)$

X complejo $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(X) \supseteq [e^{-1},1)$

Juntando resultados positivos y negativos tenemos, por ejemplo:

COROLARIO

X real, $\dim(X) = \infty$, X^{**}/X separable

$\Rightarrow \mathcal{N}(X) = [0, 1)$

Algunos problemas abiertos

(1) Calcular $n(l_p)$

(2) Sabemos que:
X arbitrario:

$$\Rightarrow \mathcal{N}(X) \supseteq \begin{cases} [0, 2/3) & \text{caso real} \\ [e^{-1}, 1/9) & \text{caso complejo} \end{cases}$$

X con "sistema biortogonal largo":

$$\Rightarrow \mathcal{N}(X) \supseteq \begin{cases} [8, 1) & \text{caso real} \\ [e^{-1}, 1) & \text{caso complejo} \end{cases}$$

¿Puede conseguirse esto último para X arbitrario?

(3) Caracterizar los espacios de Banach (reales) que admiten una norma equivalente con índice numérico 1

- Condiciones suficientes

- Condiciones necesarias:

CONJETURA

X Banach real, $\dim(X) = \infty$, $n(X) = 1 \;\Rightarrow\; X \supset c_0$ o $X \supset l_1$

(4) ¿$n(X) = n(X^*)$?