UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Análisis Matemático

La Propiedad de Daugavet

Miguel Martín Suárez

• Ecuación de Daugavet

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(DE)}$$

□ **Daugavet, 1963 :** $T \in K\big(C[0,1]\big)$ satisface (DE)

□ **Lozanoskii, 1966 :** $T \in K\big(L_1[0,1]\big)$ satisface (DE)

□ **Abramovich, Holub y otros, años 80 :**
$X = C(K)$ con K perfecto o $X = L_1(\mu)$ con μ libre de átomos,

todo $T \in L(X)$ débilmente compacto satisface (DE).

• Propiedad de Daugavet

X Banach tiene la *propiedad de Daugavet* si todo operador de rango uno $T \in L(X)$ satisface (DE)

(Kadets-Shvidkoy-Sirotkin-Werner, 2000)

$\square$ K perfecto, μ libre de átomos
$\Rightarrow C(K)$ y $L_1(\mu)$ tienen la propiedad de Daugavet

$\square$ Una C^*-álgebra tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, no tiene átomos.
El predual de un álgebra de von Neumann sin átomos tiene la propiedad de Daugavet

(Oikhberg, 200?)

□ Más ejemplos: $A(\mathbb{D})$ y H^∞

(Werner, 1997)

Teorema

X con propiedad de Daugavet, entonces todo $T \in L(X)$ débilmente compacto satisface (DE)

(Kadets-Shvidkoy-Sirotkin-Werner, 2000)

□ $\dim(X) < \infty$, entonces X no tiene la propiedad de Daugavet

□ Los espacios reflexivos no tienen la propiedad de Daugavet

Teorema

X tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, para cada $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$,

$$B_X = \overline{\mathrm{co}}\big(\{y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}\big)$$

(Werner, 2001)

Consecuencias

X con la propiedad de Daugavet, entonces:

□ X no tiene la RNP ni es un espacio de Asplund

□ $X \supset l_1$

□ $X^* \supset L_1[0,1]$ isométricamente

□ X no admite base incondicional

□ De hecho, X no está contenido en ningún espacio con base incondicional

• Espacios de funciones con valores vectoriales

X espacio de Banach, K compacto T_2, μ medida σ-finita

$$C(K,X) \qquad L_1(\mu,X) \qquad L_\infty(\mu,X)$$

TEOREMA

◇ $C(K,X)$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X la tiene o K es perfecto

(Kadets, 1996 — Martín-Payá, 2000)

Teorema

- $\diamond$ $C(K,X)$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X la tiene o K es perfecto

(Kadets, 1996 — Martín-Payá, 2000)

- $\diamond$ $L_1(\mu,X)$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X la tiene o μ no tiene átomos

(varios autores, años 80)

- $\diamond$ $L_\infty(\mu,X)$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X la tiene o μ no tiene átomos

(Martín-Villena, preprint)

Productos tensoriales

$$C(K,X) = C(K)\widetilde{\otimes}_\varepsilon X$$
$$L_1(\mu,X) = L_1(\mu)\widetilde{\otimes}_\pi X$$

PROBLEMA

X, Y espacios de Banach:

¿ $X\widetilde{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X o Y la tienen ?

¿ $X\widetilde{\otimes}_\pi Y$ tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, X o Y la tienen ?

Problemas

- □ ¿ Existe X tal que X^{**} tenga la propiedad de Daugavet ?

- □ X con la propiedad de Daugavet, ¿ $X \supset l_2$?

• Una propiedad de Daugavet "alternativa"

X tiene *índice numérico 1* si radio numérico y norma coinciden en $L(X)$, esto es

$$\|T\| = \sup\{|x^*(Tx)| \,:\, \|x^*\| = \|x\| = x^*(x) = 1\}$$

para todo $T \in L(X)$

(Lumer, 1968)

Equivalentemente, X tiene índice numérico 1 si

$$\max_{|\lambda|=1} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(aDE)}$$

para todo $T \in L(X)$

□ K compacto, μ medida positiva
$\Rightarrow C(K)$ y $L_1(\mu)$ tienen índice numérico 1

(Duncan-McGregor-Pryce-White, 1970)

□ Una C^*-álgebra es conmutativa si, y sólo si, tiene índice numérico 1

(Crab-Duncan-McGregor, 1974)

□ $C(K,X)$ y $L_1(\mu,X)$ tienen índice numérico 1 si, y sólo si, X lo tiene

(Martín-Payá, 2000)

□ $L_\infty(\mu,X)$ tiene índice numérico 1 si, y sólo si, X lo tiene

(Martín-Villena, preprint)

□ Índice numérico 1:

$$\max_{|\lambda|=1} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \in L(X)$$

□ Propiedad de Daugavet:

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \text{ compacto}$$

□ *Propiedad de Daugavet "alternativa"*:

$$\max_{|\lambda|=1} \|Id + \lambda T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \text{ compacto}$$

□ **Ejemplo**

$l_1 \oplus_\infty C([0,1], l_2)$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa pero no tiene índice numérico 1 ni tiene la propiedad de Daugavet

Teorema

- $C(K, X)$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa si, y sólo si, X la tiene o K es perfecto
- $L_1(\mu, X)$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa si, y sólo si, X la tiene o μ no tiene átomos
- $L_\infty(\mu, X)$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa si, y sólo si, X la tiene o μ no tiene átomos

Teorema

X real con la propiedad de Daugavet alternativa.

(i) Si $\sharp \mathrm{dent}\,(B_X) = \infty \quad \Rightarrow \quad X \supset c_0$ o $X \supset l_1$

(ii) Si $\sharp w^* - \mathrm{dent}\,(B_{X^*}) = \infty \quad \Rightarrow \quad X^* \supset l_1$

Problemas

◇ Caracterizar las C^*-álgebras que tienen la propiedad de Daugavet alternativa

◇ Encontrar un ejemplo "natural" de espacio de Banach con la propiedad de Daugavet alternativa que no tenga índice uno, ni tenga la propiedad de Daugavet

Conjetura

¿ X con la propiedad de Daugavet alternativa
$\Rightarrow X \supset c_0$ o $X \supset l_1$?

- **Ecuación de Daugavet**
- **Propiedad de Daugavet**
  - Consecuencias
  - Espacios de funciones con valores vectoriales
  - Productos tensoriales
- **Una propiedad de Daugavet “alternativa”**