UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

ÍNDICE NUMÉRICO Y SUBESPACIOS

Miguel Martín Suárez

Rango numérico de un operador

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$V(T) = \{x^*(Tx) \;:\; \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\}$$

(Lumer, 1961; Bauer, 1962)

Radio numérico

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \;:\; \lambda \in W(T)\}$$

v es una seminorma continua:

$$v(T) \leq \|T\|$$

Índice numérico de un espacio de Banach

$$\begin{aligned} n(X) &= \max\{k \geq 0 \;:\; k\|T\| \leq v(T) \quad \forall T \in L(X)\} \\ &= \inf\{v(T) \;:\; T \in L(X),\ \|T\| = 1\} \end{aligned}$$

$$0 \leq n(X) \leq 1 \qquad \text{si } X \text{ es real}$$

$$e^{-1} \leq n(X) \leq 1 \qquad \text{si } X \text{ es complejo}$$

$$n(X^*) \leq n(X)$$

Ejemplos "Clásicos"

□ H Hilbert, $\dim(H) > 1$, $n(H) = \begin{cases} 0 & \text{caso real} \\ 1/2 & \text{caso complejo} \end{cases}$

□ $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 \quad \mu$ medida positiva

$X^* \equiv L_1(\mu) \;\Rightarrow\; n(X) = 1$

En particular, $n\big(C(K)\big) = 1 \quad K$ espacio compacto de Hausdorff

(Duncan-McGregor-Pryce-White, 1970)

□ K compacto, μ medida, Y espacio de Banach

$$n\big(C(K,Y)\big) = n\big(L_1(\mu,Y)\big) = n(Y)$$

(Martín-Payá, 200?)

□ A álgebra de funciones $\Rightarrow$ $n(A) = 1$

(Werner, 1997)

□ ¿ $n(l_p), \quad p \neq 1,2,\infty$?

Algunos resultados de tipo isomórfico

X Banach con "sistema biortogonal largo"

(en particular, X separable o reflexivo o WCG)

X real $\Rightarrow$ $\{n(Y) \,:\, Y \simeq X\} \supseteq [0,1)$

X complejo $\Rightarrow$ $\{n(Y) \,:\, Y \simeq X\} \supseteq [e^{-1},1)$

(Finet-Martín-Payá, sometido a publicación)

□ X real, $\dim(X) = \infty$, RNP, $n(X) = 1$

$\Rightarrow$ $X \supset l_1$

□ X espacio de Asplund real, $\dim(X) = \infty$, $n(X) = 1$

$\Rightarrow$ $X^* \supset l_1$

□ X real, $\dim(X) = \infty$, $n(X) = 1$

$\Rightarrow$ X^{**}/X no es separable

(López-Martín-Payá, 1999)

• Índice numérico y subespacios

X espacio de Banach, Y subespacio de X.

¿Están relacionados $n(X)$ y $n(Y)$?

Como $n(\mathbb{R}) = n(\mathbb{C}) = 1$, el único resultado esperable $n(X) \leq n(Y)$, pero esto no es cierto en general:

Existe X de dimensión finita con $n(X) = 1$ conteniendo un subespacio 1-complementado Y tal que $n(Y) < 1$

(Reisner, 1991)

Una proyección $P \in L(X)$ es *absoluta* si

$$\|x\| = |(\|Px\|, \|x - Px\|)| \quad (x \in X)$$

para una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$. Un *sumando absoluto* es un subespacio complementado por una proyección absoluta.

PROPOSICIÓN

Si Y es un sumando absoluto de X, entonces $n(X) \leq n(Y)$.
Equivalentemente, si P es una proyección absoluta, entonces

$$n(X) \leq \min\{n(P(X)), n(\ker P)\}.$$

• Cierto "carácter hereditario" del índice numérico

X Banach con $n(X) = 1$, Y subespacio separable de X,

¿Existe Z separable con $Y \subset Z$ y $n(Z) = 1$?

No se sabe en general. SI en ciertos ambientes isomórficos:

□ X está *determinado de forma débilmente numerable (WCD)* si existen $K_n \subset X^{**}$ conjuntos w^*-compactos tales que $\forall x \in X$, $\forall u \in X^{**} \setminus X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_n$ y $u \notin K_n$.

□ X es un espacio de Asplund si cualquier subespacio separable suyo tiene dual separable.

TEOREMA

X Asplund WCD, con $n(X) = 1$; Y subespacio separable de X. Entonces existe un subespacio separable Z de X con

$$Y \subseteq Z \qquad \text{y} \qquad n(Z) = 1.$$