

FLORENTINO GARCÍA SANTOS: IN MEMORIAM

ALFONSO BOMERO SARABIA
MIGUEL ORTEGA TIJOS
JUAN DE LOS RÍOS PÉREZ JUVÉNEZ
CEFERINO RUIZ GARRIDO
MANUEL ZARCO DEZ
SOLIEL SAMBRIZ CALA
(MÉJ)

H
HOMENAJES

euq

A black and white photograph of Florentino García Santos, an elderly man with glasses, wearing a checkered short-sleeved shirt. He is looking down and slightly to the right. The background features a large, faint watermark of the seal of the University of Granada, which includes the text 'GRANATAE' and '1492'.

Aportación en Geometría Diferencial Afín

Antonio Martínez y Francisco Milán

Dedicado a la memoria del Profesor Florentino García Santos

Resumen. La aportación realizada por el Profesor Florentino García Santos en el campo de la Geometría Diferencial Afín, ha resultado ser pionera en técnicas y resultados generales de clasificación de superficies afines con invariantes afines constantes. El objetivo del presente artículo es mostrar algunos de estos resultados, su impacto y los avances realizados.

Mathematics Subject Classification (2010). 53A15, 58J47.

Keywords. Superficies afines, curvaturas afines, Invariante Pick.

1. Antecedentes y planteamiento del problema

Si bien la geometría diferencial afín tiene una larga historia cuyos orígenes se remontan a 1841 en un trabajo de Transon sobre el normal afín de una curva, fue 65 años después cuando un grupo de geómetras como Pick (1906) y Tzitzèica (1907), entre otros, iniciaron el estudio sistemático y profundo de aquellas propiedades de curvas y superficies que son invariantes bajo el grupo unimodular (o equiafín) de transformaciones de \mathbb{R}^3 .

A partir de 1916, Blaschke y sus colaboradores continuaron con este estudio, publicando en 1923 la primera monografía en Geometría Diferencial Afín, [?]. Ellos desarrollaron la Teoría Equiafín de Superficies de forma análoga a la Teoría clásica de superficies, tratando de buscar invariantes equiafines sobre las mismas. De hecho, ya observaron que para una superficie no degenerada en \mathbb{R}^3 es posible introducir:

- Una métrica invariante por transformaciones equiafines, conocida como *métrica afín* o *métrica de Blaschke*, que, esencialmente, no es más que la segunda forma fundamental corregida por una potencia de la función curvatura de Gauss euclídea de la superficie.

- Una normalización equiafín, determinada por un campo de vectores transversal llamado *normal afín* cuya dirección en cada punto, en el caso localmente convexo, viene dada por la velocidad de la curva que determinan los centros de gravedad de las secciones de la superficie con los planos paralelos al plano tangente en dicho punto. En consecuencia, hiperboloides y elipsoides verifican que su vector de posición respecto a su centro es paralelo a la correspondiente dirección del normal afín, y en un paraboloides, la dirección del normal afín es siempre constante.

Concretamente, sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie con segunda forma fundamental σ no degenerada y normal unitario η . Con estos invariantes euclídeos, se pueden introducir la **métrica afín** h y el **conormal afín** N como

$$h = |K|^{-1/4}\sigma \quad y \quad N = |K|^{-1/4}\eta,$$

donde por K se denota la curvatura de Gauss euclídea de la inmersión.

El **normal afín** de la inmersión viene dado por el siguiente campo de vectores transversales

$$\xi = \frac{1}{2}\Delta_h\psi,$$

siendo Δ_h el Laplaciano para la métrica afín. Este campo puede ser caracterizado como el único campo de vectores transversal a Σ (o $\psi(\Sigma)$) que verifica la siguiente normalización:

$$\langle N, \xi \rangle = 1 \quad y \quad \langle N, D_X\xi \rangle = 0, \quad \forall X \in T\Sigma, \quad (1)$$

siendo D la conexión afín llana usual de \mathbb{R}^3 .

De forma natural, aparecen también la **conexión afín inducida** ∇ y el **operador afín de Weingarten** S , dados por

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi, \quad SX = -D_X\xi, \quad \forall X, Y \in T\Sigma \quad (2)$$

así como los invariantes afines

$$H = \frac{1}{2}\text{traza}(S) \quad y \quad \tau = \det(S),$$

que se denominan **curvatura media afín** y **curvatura afín de Gauss-Kronecker**, respectivamente. Además, de (??) y (??) se puede deducir que

$$\Delta_h N = -2HN.$$

El Teorema Afín Egregio establece también que

$$\kappa = H + J,$$

donde κ es la curvatura de Gauss de la métrica afín h y J es el **invariante Pick** dado por

$$J = \frac{1}{8}h(\nabla h, \nabla h),$$

el cual mide la diferencia entre ∇ y la conexión de Levi-Civita para h .

De hecho, cuando la métrica afín es definida, el clásico Teorema de Berwald, establece que las dos conexiones coinciden si y sólo si $J = 0$ y la superficie es parte de una cuádrlica. En 1918 y para el caso indefinido, J.

Radon [?] clasificó todas las superficies con $J = 0$ y H constante obteniendo localmente superficies regladas.

Salvo estos resultados clásicos, la clasificación de las superficies afines con invariantes afines constantes ha sido uno de los principales objetivos para un buen entendimiento de la geometría diferencial afín y sigue siendo una de sus metas más importantes.

En este sentido, algunas familias particulares han merecido una especial atención, destacamos:

Esferas afines con κ constante.

Las superficies umbilicales de esta teoría denominadas también *esferas afines*, son superficies afines cuyas rectas ‘normales afines’ son todas paralelas (esferas afines *impropias*) o pasan todas por un punto fijo llamado centro (esferas afines *propias*); en ellas la curvatura media afín H es automáticamente constante. En este sentido, las esferas afines con métrica afín de curvatura constante fueron clasificadas por U. Simon en [?], quien generalizó resultados de M. Magid y P. Ryan, [?], A.M. Li y G. Penn, [?], T. Kurose, [?] y J. Radon, [?]. Concretamente, toda esfera afín con κ constante es una cuádrlica o afínmente equivalente a una de las siguientes superficies (ver Figura ??)

- La superficie de ecuación $xyz = 1$ con métrica afín definida, $H < 0$ y $\kappa = 0$.
- La superficie de ecuación $x(y^2 + z^2) = 1$ con métrica afín indefinida, $H \neq 0$ y $\kappa = 0$.
- La superficie reglada de ecuación $z = xy + f(y)$ donde f es una función diferenciable. Esta superficie tiene métrica afín indefinida, $H = 0$ y $\kappa = 0$

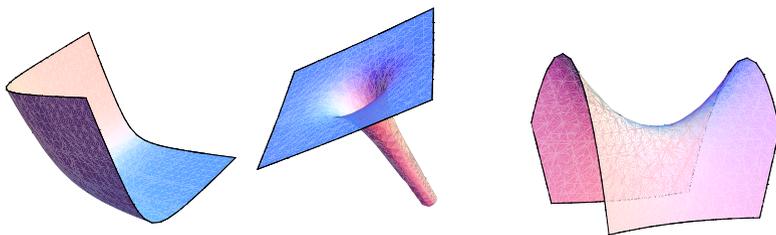


FIGURA 1. Esferas afines con κ constante (no cuádrlicas).

Superficies regladas con κ constante.

Es bien conocido que toda superficie afín reglada tiene invariante Pick nulo, [?]. Así, toda superficie reglada con curvatura media afín constante tiene su métrica afín de curvatura constante.

Superficies con $3\kappa = H$.

Las superficies con $3\kappa = H$ juegan un papel fundamental en el estudio de las superficies con invariantes afines constantes. De [?], se tiene que las superficies

$$\left(u, v, \frac{1}{2} \left(u^2 + \varepsilon v^{\frac{2}{3}}\right)\right), \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (3)$$

no son esferas afines y tienen H y τ constantes. Además $3\kappa = H$.

Estas familias de ejemplos motivaron que los autores en colaboración con los profesores F. Dillen, L. Vrancken y el profesor Florentino García Santos, nos propusiésemos en [?] avanzar en la clasificación general de las superficies afines con invariantes κ , H y J constantes.

2. Resultados

2.1. Superficies con invariante Pick no nulo

En el caso particular de que el invariante Pick sea una constante no nula, (se puede suponer que ésta es positiva, en caso contrario cambiamos el signo del normal afín) logramos demostrar la existencia de una referencia ortonormal que diagonaliza la forma cúbica ∇h y permite probar el siguiente resultado de clasificación:

Proposición 1. *Si una superficie afín con métrica afín de curvatura constante tiene invariante Pick J constante y positivo, entonces $3\kappa = H$ o su curvatura afín de Gauss-Krönercker, τ , es también constante.*

Resultado que usamos para demostrar que

Teorema 2. *Una superficie afín con métrica afín de curvatura constante e invariante Pick constante y positivo es una esfera afín con curvatura afín de Gauss nula o $3\kappa = H < 0$.*

Corolario 3. *Una superficie afín localmente convexa en \mathbb{R}^3 , con métrica afín de curvatura constante positiva e invariante Pick constante es parte de un elipsoide.*

Para el caso en que $3\kappa = H$, aparte de los ejemplos descritos en la sección anterior, obtenemos, usando el Teorema Fundamental de Existencia de Radón, dos nuevas superficies Σ_1 y Σ_2 que aunque no pueden describirse explícitamente si nos permiten obtener la siguiente clasificación

Teorema 4. *Si una superficie afín tiene métrica afín de curvatura constante y $3\kappa = H \neq 0$, entonces ha de ser una parte de las superficies descritas en (??) o de las superficies Σ_1 o Σ_2 .*

2.2. Superficies con invariante Pick nulo

En el caso localmente convexo, el Teorema de Berwald nos dice que las únicas superficies con invariante Pick nulo son parte de una cuádrica, por tanto la clasificación de ésta familia de superficies se puede reducir a estudiar el caso en el que la métrica afín sea indefinida.

Aunque la familia de superficies con $J = 0$ resulta ser bastante amplia, en [?], obtenemos una descripción de las mismas:

Teorema 5. *Si una superficie afín tiene métrica afín indefinida de curvatura constante y $J = 0$, entonces en un entorno de cada punto puede ser descrita como la siguiente superficie reglada dada por*

$$x(u, v) = uf(v) + g(v),$$

donde las curvas f y g verifican:

$$\text{Det}[f, g', f'] = 1, \quad \text{Det}[f, f', f''] = H.$$

3. Impacto y avances

El estudio y clasificación realizado en [?] sobre las superficies afines con H, J y $\kappa = H + J$ constantes, proporcionó ideas y caracterizaciones de los ejemplos fundamentales de esta teoría, que han motivado y siguen haciéndolo resultados en distintas direcciones:

3.1. Superficies con métrica afín definida y llana

En el caso localmente convexo es bien conocido, por el clásico Teorema de Pick y Berwald, que la única superficie afín llana con $J = 0$ es el paraboloido elíptico. Sin embargo, en [?] se caracterizan también:

- La esfera afín llana $xyz = 1$ que tiene invariante Pick J constante no nulo.
- La superficie de revolución

$$\psi(u, v) = \left(\cosh(3u)^{\frac{1}{3}} \cosh(\sqrt{3}v), \cosh(3u)^{\frac{1}{3}} \sinh(\sqrt{3}v), \int_0^u \cosh(3t)^{-\frac{2}{3}} dt \right) \quad (4)$$

que es llana y completa respecto la métrica afín y no tiene otros invariantes afines constantes.

Estos ejemplos han abierto la puerta al interesante problema, aun sin resolver de:

“clasificar las superficies afines de curvatura afín de Gauss nula tanto desde un punto de vista local como global”.

Aportaciones en esta dirección han sido la de Manhart, [?], quien completa la clasificación de las superficies afines llanas de revolución con otros ejemplos que no tienen su métrica afín completa y la de Lee y Vrancken, [?], quienes prueban que las únicas superficies afines llanas completas y proyectivamente llanas son afinmente equivalentes a un paraboloido elíptico o a la esfera afín $xyz = 1$.

En relación con este último resultado de Lee y Vrancken, mencionar que sigue como problema abierto el conocer si estas dos esferas afines son o no las únicas superficies afines llanas completas con curvatura afín de Gauss-Kronecker constante.

Los tres ejemplos anteriores han sido caracterizados, ver [?], como las únicas superficies con métrica afín completa y de curvatura nula, cuyo endomorfismo afín de Weingarten e invariante Pick verifican la siguiente condición:

$$\text{traza}(\nabla S) + \mu \text{grad}_h(J) = 0$$

para alguna constante μ que es nula en el caso de superficies proyectivamente llanas.

Estos tres ejemplos, ver también Figura ??, resultan ser las únicas superficies afines llanas y de Weingarten conocidas hasta el momento, quedando abierta su clasificación.

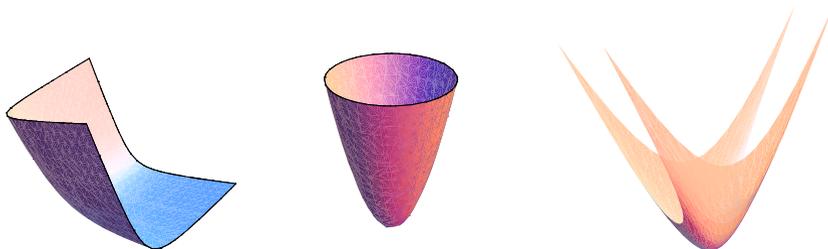


FIGURA 2. Superficies afines completas y llanas.

3.2. Superficies con métrica afín indefinida y llana

Contrariamente al caso localmente convexo, cuando la métrica afín es indefinida, el Teorema ?? nos dice que tenemos una gran familia, que incluye a las superficies regladas con curvatura media afín nula. Además, en [?] describimos estas superficies, que son puntos críticos para el funcional área afín, a partir de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $y'' = by$, y probamos que el índice de esta ecuación guarda una estrecha relación con el signo de la segunda variación del área afín de la superficie y el número de vueltas que da. Esto contrasta con el caso convexo, donde E. Calabi, [?], probó que la segunda variación del área afín es siempre negativa.

3.3. Otros resultados

Caracterizaciones locales de superficies afines con invariantes afines constantes han sido también obtenidas por C. Chen y H. Sun, [?], quienes han clasificado las superficies afines de traslación con H constante.

Por otro lado, la existencia de superficies afines homogéneas y no homogéneas con J y $H = 3k$ constantes ha motivado la búsqueda de otras condiciones para distinguirlas. Así por ejemplo en [?], se prueba que si una superficie localmente convexa tiene invariante Pick constante y curvatura afín de Gauss-Krönecker nula, entonces, salvo transformaciones afines, ha de ser una parte de un paraboloido elíptico o de la superficie afín homogénea

$$(u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^{-2/3})), \quad v > 0.$$

Recientemente, P.J. Olver, [?], ha destacado la importancia del invariante Pick en el conocimiento de las superficies afines y T. Binder, [?], ha probado que las curvas de gravedad, que dan la dirección del normal afín, son llanas si y sólo si $3H + J$ es constante. Pero de momento no se conoce ningún ejemplo que verifique esta condición y que tenga invariante Pick no constante.

Referencias

- [1] T. Binder, An affine invariant characterization of flat gravity curves, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **79** (2009), 265–281.
- [2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie. *Springer*, 1923.
- [3] E. Calabi, Hypersurfaces with maximal affinity invariant area, *Amer. J. Math.* **104** (1984), 91–126.
- [4] C. Chen y H. Sun, On affine translation hypersurfaces of constant mean curvature. *Publ. Math. Debrecen* **64** (2004), 381–390.
- [5] F. Dillen, A. Martínez, F. Milán, F.G. Santos y L. Vrancken, On the Pick invariant, the affine mean curvature and the Gauss curvature of affine surfaces, *Result. Math.* **20** (1991), 622–642.
- [6] T. Kurose, Two results in the affine hypersurface theory, *J. Math. Soc. Japan* **41(3)** (1989), 539–548.
- [7] A.M. Li y G. Penn, Uniqueness theorems in affine differential geometry, part II, *Results Math.* **13** (1988), 308–317.
- [8] A.M. Li, U. Simon y G. Zhao, Global affine differential geometry of hypersurfaces, *Walter de Gruyter* 1993.
- [9] C.I. Lee y L. Vrancken, Projectively flat affine surfaces with flat affine metric, *J. Geom.* **70** (2001), 85–100.
- [10] M.A. Magid y P. Ryan, Flat affine spheres in \mathbb{R}^3 , *Geom. Dedicata* **33(3)** (1990), 277–288.
- [11] F. Manhart, Affine rotational surfaces with vanishing affine curvature., *J. Geom.* **80(1-2)** (2004), 166–178.
- [12] A. Martínez y F. Milán, On affine-maximal ruled surfaces, *Math. Z.* **208** (1991), 635–644.

- [13] A. Martínez, F. Milán y L. Vrancken, A class of surfaces with flat Blaschke metric and their characterization, *Annals of Global Analysis and Geometry* **28** (2005), 35-57.
- [14] F. Milán, Pick invariant and affine Gauss-Kronecker curvature, *Geom. Dedicata* **45** (1993), 41-47.
- [15] K. Nomizu y T. Sasaki, Affine differential geometry, *Cambridge University Press* 1994.
- [16] P.J. Olver, Moving frames and differential invariants in centro-affine geometry *Lobachevskii J. Math.* **31** (2010), 77-89.
- [17] J. Radon, Zur affingometrie der regelflächen, *Leipzig Berichte* **70** (1918), 147-155.
- [18] U. Simon, Local classification of two-dimensional affine spheres with constant curvature metric *Differential Geom. Appl.* **1** (1991), 123-132.
- [19] L. Vrancken, Affine surfaces with constant affine curvatures, *Geom. Dedicata* **33** (1990), 177-194.

Antonio Martínez
Departamento de Geometría y Topología,
Facultad de Ciencias,
Universidad de Granada
E-18071 Granada, Spain
e-mail: amartine@ugr.es

Francisco Milán
Departamento de Geometría y Topología,
Facultad de Ciencias,
Universidad de Granada
E-18071 Granada, Spain
e-mail: milan@ugr.es