Relación de problemas 4

Matemáticas

Curso 2020-21

1. Sean A y B dos matrices de orden 4×5 y C, D y E matrices con órdenes 5×2, 4×2 y 5×2, respectivamente. Determinar cuáles de las siguientes expresiones matriciales están bien definidas y, en tal caso, calcular el orden de la matriz resultante.

   (i) BA $\quad$ (ii) $AC + D$ $\quad$ (iii) $AE + B$ $\quad$ (iv) $AB + B$
   (v) $E(A + B)$ $\quad$ (vi) $E(AC)$ $\quad$ (vii) $E^t A$ $\quad$ $(viii)$ $(A^t + E)D$

2. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

   Calcular, si es posible, $A^2 - (AB) + B^2$ y $2A + C^2$.

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

   $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular, si es posible:

   (i) AB $\quad$ (ii) $D + E$ $\quad$ (iii) $D - E$ $\quad$ (iv) DE $\quad$ (v) ED $\quad$ (vi) BC $\quad$ (vii) $C^t B$

4. Dadas las matrices siguientes, estudiar si son matrices cuadradas y, si lo son, especificar si son triangulares, diagonales o escalonadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

   comprobar que se verifican estas propiedades:

   a) $AB \neq BA$ (el producto de matrices no es conmutativo),
   b) $(AB)^t = B^t A^t$ (la traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiado de orden).

6. Estudiar si las siguientes matrices tienen inversa y, en su caso, calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Se consideran las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$
Calcular la matriz X de orden 2×2 que resuelve las ecuaciones matriciales:
$$(a)\ BX = C, \quad (b)\ AX - B = C, \quad (c)\ XC^t = B.$$

8. Calcular el rango de las siguientes matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

9. Para la matriz D del ejercicio anterior calcular los menores adjuntos δ_{13}, δ_{34} y δ_{21}. Calcular también $|D|$.

10. Calcular los siguientes determinantes:
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

11. Analizar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden entonces $|A + B| = |A| + |B|$.

12. Determinar el rango de las siguientes matrices en función del parámetro t:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 0 & t+1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & t & 1 & 1+t \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & t+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Decidir cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales. Para los que lo sean, escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + \sqrt{z} & = & 0 \\ y - z & = & 3x \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0 \\ y - z & = & 35 \\ x + 2y + 3z & = & 2007 \end{array} \right.,$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2z & = & -3y \\ \operatorname{sen}(2)\, z & = & 35 - 2x \\ y + x & = & \sqrt{3}\, z \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 28 \\ z^2 & = & 35 \\ \operatorname{sen}(x) + \cos(y) & = & \operatorname{tg}(z) \end{array} \right..$$

14. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+10z & = & 18 \\ 2x+3y+12z & = & 23 \\ 2y+5z & = & 11 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & -1 \\ 3x-y+2z & = & 1 \\ 5x+3y-4z & = & 2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 6 \\ 2x-y+4z & = & 2 \\ 4x+3y-2z & = & 14 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+4z-2t & = & 5 \\ 2y+5z+t & = & 2 \\ y-3z & = & 4 \end{array}\right. .$$

15. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonados:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ y+z+t & = & 2 \\ z+t & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & -z-t \\ y+z+t & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \{x-y+10z=8\ .$$

16. Utilizar el método de Gauss para discutir y resolver los sistema de ecuaciones lineales del ejercicio 15. En caso de que alguno de estos sistemas sea de Cramer, resolverlo también haciendo uso de la regla de Cramer.

17. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4y-z & = & -7 \\ x+y+z & = & 2 \\ x-2y+z & = & -2 \\ -x+2y & = & 3 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y+z-2s+t & = & 2 \\ x+2y+s & = & 7 \\ 2x-y+z+4s+t & = & 0 \end{array}\right. .$$

18. Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (a+1)x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & az & = & 4 \\ x & + & ay & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & az & = & 2 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & az & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 1-a \\ ax & + & ay & + & z & = & 0 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -2 \\ x & - & y & + & az & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 3 \\ x & + & ay & & & = & 1 \end{array}\right. .$$

19. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Se sabe también que la cifra de las decenas coincide con la media aritmética entre las otras dos. Calcular dicho número.

20. Calcular la parábola $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(-1, 12)$.

21. Un tanque contiene una mezcla de insecticida y agua en la cuál se tiene 5 litros de insecticida y 25 litros de agua. Un segundo tanque también contiene 5 litros de insecticida pero sólo 15 litros de agua. Si se desea tener 7,5 litros de una mezcla de la cuál el 20 % es insecticida, ¿cuántos litros deben tomarse de cada tanque?

22. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 19152 euros. La última versión del videojuego ha salido a la venta por un importe de 36 euros. Además de la última versión ha vendido, con un descuento del 30 % y del 40 %, otras dos versiones anteriores del videojuego. El número total de ejemplares vendidos de las dos versiones anteriores ha sido la mitad del de la última versión. ¿Cuántos ejemplares de cada versión vendió?

23. Utilizando la Ley de la Conservación de la Materia de Lavoisier ajusta la siguiente reacción química:

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$