Relación de problemas 2

Matemáticas. Curso 2020-21

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(3x)$

   (b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}\right)$

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

   (f) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x)$

   (g) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(\dfrac{1}{x})$

   (h) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (i) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$

   (j) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\ln(x)}$

   (k) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+1}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

   (l) $f(x) = \ln_a(1+\operatorname{tg}^2(x))$

   (m) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

   (n) $f(x) = \dfrac{x^3+7x^2+5}{x^4+x^2+1}$

   (ñ) $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$

   (o) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

2. Utilizar la definición de derivada para demostrar que si a es un número positivo cualquiera y $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(a) = 1/a$. Pista: hay que utilizar propiedades de los logaritmos y el criterio 1^∞.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{9x-27}{bx+3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

   Se pide:

   a) Determina los valores de los parámetros a y b para los que la función f es continua.

   b) Determina los valores de los parámetros a y b para los que la función f es derivable.

4. Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 10^6 & \text{si} \quad 0 \geq t \geq 2 \\ 10^6 \mathrm{e}^{t-2} & \text{si} \quad t > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Verificar que la población es función continua del tiempo.

b) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0,2]$ y $[0,4]$.

c) Calcular la tasa de variación instantánea en $t = 4$.

5. Un estudio de medio ambiente de una comunidad suburbana concluye que, dentro de t años, el nivel medio de monóxido de carbono en el aire será de $q(t) = 0,05t^2 + 0,1t + 3,4$ partes por millón.

a) Calcular la tasa de variación del monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de un año.

b) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el primer año.

c) Calcular cuánto variará el monóxido de carbono durante el segundo año.

6. Escribir las ecuaciones de la recta tangente a la curva $y = x^2 - \operatorname{arc\,sen}(x)$ en el punto $(0,0)$. Lo mismo para la función $f(x) = \cos(x-1)\ln(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

7. Hallar el valor del parámetro k para que la recta tangente a la curva $y = \ln(x) - kx$ en el punto de abcisa $a = 2$ forme un ángulo de 45° con el eje de abcisas.

8. Hallar el valor de m para que la recta tangente a la curva $y = \arccos(x-1) + mx$ en el punto de abcisa $a = 1$ sea horizontal.

9. ¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x - e^x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

10. Encontrar los puntos en los que la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^4 - 2x + 1$ es paralela a la recta $2x - y - 3 = 0$.

11. Estudiar el límite en $a = 0$ de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}, \quad x \in A.$

b) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^{1/x}, \quad x \in A.$

c) $A = (0, \pi/2), \quad f(x) = (1 - \operatorname{tg}(x))^{\frac{1}{x^2}}, \quad x \in A.$

12. Calcular los siguientes límites aplicando, cuando sea posible, la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+}(\operatorname{sen}(x))\,(\ln(x)), \quad \lim_{x\to0^+}(1+\operatorname{sen}(x))^{\ln(x)}, \qquad \lim_{x\to0} \tfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{\cos(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+} \tfrac{x-\operatorname{arc\,tg}(x)}{x^4}, \qquad \lim_{x\to1^+} \left(\tfrac{1}{\ln(x)} - \tfrac{1}{x-1}\right),$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(2x)}, \qquad \lim_{x\to0^+}(\cos(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, \qquad \lim_{x\to0^-} \tfrac{\ln(x^2+1)}{x^2-x^3}, \qquad \lim_{x\to0^+} \left(\tfrac{1}{e^x-1} - \tfrac{1}{x}\right).$$

13. Calcular y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones dentro del intervalo I que se indica en cada caso:

    (i) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \qquad I = \mathbb{R}.$

    (ii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

    (iii) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)\,(x-1)}, \qquad I = (-1, 1).$

    (iv) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, \qquad I = \mathbb{R}.$

    (v) $f(x) = x - \operatorname{sen}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

    (vi) $f(x) = x + \cos(x), \qquad I = (-\pi, \pi).$

    (vii) $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg}(x), \qquad I = \mathbb{R}.$

    (viii) $f(x) = e^x + e^{-x}, \qquad I = \mathbb{R}.$

    (ix) $f(x) = x\,\ln(x), \qquad I = (0, +\infty).$

14. Estudiar la monotonía, la curvatura, los puntos críticos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

    (i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

    (ii) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}.$

    (iii) $h(x) = x - \operatorname{arc\,tg}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

    (iv) $i(x) = \ln(x), \quad x \in (0, +\infty).$

15. Determinar el máximo y el mínimo absolutos de las funciones $f(x) = x^3 + x + 1$ y $g(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

16. Utilizar el Teorema del valor medio para demostrar que si f es una función derivable en un intervalo abierto I y $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces $f(x) = f(y)$ para cualesquiera $x, y \in I$, es decir f es constante sobre I.

17. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan empatados. Probar que tuvieron exactamente la misma velocidad en un instante de tiempo.

18. Probar que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.

19. La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde el comienzo del estudio ($t = 0$). Indica los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que esta crece y decrece.

20. Se quiere vallar un campo rectangular que está a la orilla de un río. Si el precio del metro de valla es de 5 euros, hallar la mayor superficie de campo que se puede vallar con 2400 euros. (Se supone que no se valla la parte del campo que linda con el río).

21. Dos postes de 4 y 5,6 metros de altura respectivamente se encuentran a 6 metros de distancia. Se han de sujetar con cables fijados en un solo punto, desde el suelo a los extremos de los postes. ¿Dónde se han de fijar los cables para que la cantidad de cable a emplear sea mínima?

22. Calcular el máximo volumen que se puede conseguir al fabricar una caja sin tapa superior con una pieza cuadrada de cartón de 2 cm de lado al cortar y doblar cuadraditos iguales de cada esquina.

23. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de dos metros de largo en dos trozos. Uno de los dos trozos se va a doblar en forma de circunferencia y el otro en forma de cuadrado. Determinar cómo se debe de cortar el alambre para que el área total encerrada por las dos figuras creadas sea mínimo /máximo.

24. Una lata cilíndrica debe contener 64 cm^3. Hallar sus dimensiones de manera que la cantidad de metal sea mínima supuesta la lata: a) abierta por arriba, b) cerrada.

25. La cantidad de agua recogida en un determinado año en cierto pantano expresada en millones de litros viene dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1},$$

donde $t \in [0, 12]$ se mide en meses. Se pide:

   a) Halla el periodo de tiempo en el que aumentó la cantidad de agua recogida.
   b) Calcula el instante en el que se obtuvo la cantidad máxima de agua.
   c) ¿Cúal fue esa cantidad?

26. Sea f la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}}{x^2 - 5x + 6} & \text{si} \quad x > 1 \\ x\mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determina el dominio de definición de f y estudia la continuidad de dicha función.

b) Determina las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la función con respecto a sus asíntotas.

c) Calcula la primera derivada de la función f. ¿Es la función derivable en $x = 1$? Determina los puntos críticos de f, máximos y mínimos de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

d) Calcula la segunda derivada de la función f. Determina los intervalos de convexidad y concavidad de f y los puntos de inflexión de f.

e) Utilizando todo lo anterior, dibuja la gráfica de la función f.

f) Prueba que existe un único punto $x > 3$ tal que $f(x) = \ln(x)$.

27. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Se pide:

a) Determina los ceros de f, el signo de f, las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a sus asíntotas. Estudia la continuidad de f en $x = 0$ y el dominio maximal donde la función f es continua.

b) Calcula la primera derivada de la función f. ¿Es f derivable en $x = 0$? Determina los puntos críticos de f, los máximos y mínimos (absolutos y relativos) de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Calcula la segunda derivada de la función f. ¿Es f dos veces derivable en $x = 0$? Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f y los puntos de inflexión de f.

Por último, utilizando todo lo anterior, dibuja la gráfica de la función f.

28. Estudiar las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{3(x^2-4)}{x^2-1}$ (d) $f(x) = x\,\ln(x)$

(e) $f(x) = e^{-x^2/2}$ (f) $f(x) = x\,e^x$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$