Relación de problemas 1

Matemáticas. Curso 2020-21

1. Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

   (i) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   (ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

   (iii) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

   (iv) $f(x) = 2 + \sqrt{1 - (x-1)^2}$

   (v) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$

   (vi) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}}$

   (vii) $f(x) = 2^x + \pi$

   (viii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   (ix) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

   (x) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 3)$

   (xi) $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x^3}$

   (xi) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   (xii) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x^2 + 1)$

2. Calcular los siguientes límites:

   (i) $\lim\limits_{x \to -1} (-x^3 - x^2 - x + 12)$

   (ii) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2 - 1}\right)$

   (iii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 4}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

(v) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x^2-1}$

(vii) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3}{x+1}$

(viii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

(ix) $\lim\limits_{x\to 1} x \operatorname{arc\,tg}(x)$

(x) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

(xi) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-x^3+3x+2)$

(xii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x^2+5x+2}{3x^2+7}$

(xiii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{\operatorname{arc\,tg}(x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)$

(xiv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^3-1}}{x^3+1}$

(xv) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2}$

(xvi) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando, en su caso, el tipo de discontinuidades que presentan:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \le 0 \\ 2x-3 & x > 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2+x-3}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}.$$

$$f_4(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad f_5(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad f_6(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 0 & x = 5 \end{cases}.$$

4. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & x < 0 \\ ax+b & 0 \le x < 1 \\ 2 & x \ge 1 \end{cases},$$

calcular los valores de a y b para que sea continua.

5. En los siguientes ejemplos la función está definida en todo punto excepto para $x_0 = 2$. En cada caso, calcúlese el valor que se debe asignar a $f(2)$, si es que hay alguno, para que la función sea continua en 2.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & x < 2 \\ \ln(\ln(x-1)) & x > 2 \end{cases}$.

6. Sean a y b dos números reales que verifiquen $a < 0 < b$. Estudiar el límite en $x_0 = 0$ de las funciones $f, g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{\frac{-1}{x}} & x > 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$ y calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

8. Estudiar la existencia de asíntotas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$, b) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, c) $f(x) = x\ln(x^2 - 1)$

d) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}$, e) $f(x) = x + \sqrt{x}$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, \mathrm{e}^x - (\cos(x))^2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3x - 8}{x - 2} + \arctan(x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Determina los valores del parámetro α para los que la función es continua en $x = 0$.

b) Estudia la continuidad de f en $x = 2$.

c) Para el valor de α obtenido en el apartado a), determina las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) y la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a sus asíntotas.

d) Prueba que existe algún punto $x > 2$ tal que $f(x) = 0$.

10. Un grupo de suricatos huye de una fuerte sequía que asola su hábitat y comienza su peregrinaje en busca de agua en el instante t = 0. El número de individuos de la población sigue esta ley: $P(t) = 140 - 4t - t^2$, donde t se mide en meses.

    a) ¿Cuántos suricatos había al principio de la huida?
    b) Demuestra que la población va siempre disminuyendo.
    c) Finalmente no encontraron zonas con agua. ¿Cuándo desapareció la población completamente?

11. El coste mensual de las llamadas telefónicas de cierta compañía se obtiene sumando una cantidad fija (en concepto de alquiler de línea) con otra proporcional a la duración de las llamadas. En dos meses distintos se han pagado 21,14 euros por 13 horas y 27 minutos de llamadas y 23,60 euros por 15 horas y media de llamadas.

    a) Encuentra la función que nos da el coste en función de los minutos hablados.
    b) ¿Cuántos céntimos cobran por cada minuto hablado?

12. La población de bacterias de cierto cultivo sigue esta ley:

$$f(t) = \frac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}$$

    miles de bacterias, donde t indica los días transcurridos desde su inicio.

    a) ¿Qué población había al principio del estudio?
    b) ¿Qué población habrá al cabo de una semana?
    c) A medida que transcurre el tiempo, ¿hacia qué valor tiende a estabilizarse la población?

13. La concentración de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad viene dada por la función $C(x) = 90 + 15x - 0{,}6x^2$, donde x es el tiempo transcurrido desde el 1 de enero de 1990, contado en años.

    a) ¿Hasta qué año está creciendo la concentración de ozono?
    b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono que alcanza esa ciudad?

14. Utilizar el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln(x) = e$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

15. Probar que existe un número real positivo x que verifica $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$.

16. Demuestra que la ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene alguna solución real.

17. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir una montaña el sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del sábado.