UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Dpto. de Geometría y Topología

GEOMETRIA III. RELACION DE PROBLEMAS. GRUPO 2º B DEL GRADO EN MATEMÁTICAS.

(1) Sean $Q \subset \mathbb{R}^n$ una hipercuádrica y $L \subset \mathbb{R}^n$ una recta afín. Demostrar que $L \cap S$ es uno de los siguientes casos: o bien vacío, o bien un punto, o bien consiste en dos puntos, o bien $L \cap Q = L$.

(2) Probar que, por cada punto del hiperboloide de una hoja

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

pasa al menos una recta.

(3) Dar un ejemplo de una hipercuádrica que no sea unión de hiperplanos afines y que contenga rectas afines.

(4) ¿Contiene alguna recta el paraboloide hiperbólico

$$x^2 - y^2 - 2\,z = 0?$$

(5) Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ una hipercuádrica y $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio afín. Probar que:
   (a) $S \cap Q$ es vacío, o bien
   (b) $S \subset Q$, o bien
   (c) $S \cap Q$ es una hipercuádrica de S (identicando S con $\mathbb{R}^k$, $k = dim(S)$).

(6) Clasificar afínmente la hipercuádrica de $\mathbb{R}^4$ de ecuación

$$2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 1 = 0.$$

(7) Clasificar afínmente las siguientes cónicas:
   i) $2x^2 - y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.
   ii) $x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.
   iii) $2x^2 + xy + y^2 - x + y = 0$.

(8) Clasificar afínmente las siguientes cuádricas:
   i) $2x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 2x - 2y + 1 = 0$.
   ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 3x + 4y + z - 1 = 0$.
   iii) $2x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.
   iv) $2x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0$.
   v) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0$.

(9) Clasificar afínmente las cónicas que se obtienen al cortar el cono de ecuación
$$x^2 + y^2 = z^2$$
con un plano arbitrario
$$ax + by + cz + d = 0.$$

(10) Encontrar una transformación afín que lleve la cónica de ecuación:
$$x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y + 1 = 0$$
en su forma reducida.

(11) ¿Qué hipercuádricas son invariantes por homotecias de centro 0 y razón arbitraria?

(12) En $\mathbb{R}^2$, demuestra que el lugar geométrico de los puntos tales que la distancia a un punto F, llamado foco, y la distancia a una recta afín $r$con $F \notin r$, llamada directriz, son iguales, es una parábola.

(13) En $\mathbb{R}^2$, demuestra que toda hipérbola admite dos rectas, llamadas asíntotas, tales que la distancia de un punto de la hipérbola a una de las rectas se puede hacer tan pequeña como se quiera.

(14) Se dice que una hipercuádrica $Q \subset \mathbb{R}^n$ tiene centro C si Q es invariante respecto a la simetría con centro en C. Demostrar que una elipse y una hipérbola tienen centro, pero una parábola no lo tiene.