UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Dpto. de Geometría y Topología

GEOMETRIA III. RELACION DE PROBLEMAS. GRUPO 2º B DEL GRADO EN MATEMÁTICAS.

(1) Probar que el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z = 0\}$$

con la acción de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(x, y, z) + (u, v) = (x + u, y + v, (x + u)^2 + (y + v)^2,$$

es un espacio afín.

(2) Sean $P_0, \ldots, P_k$ puntos de un espacio afín A. Demostrar que los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_k}$ son linealmente independientes si, y sólo si, lo son los vectores $\overrightarrow{P_iP_0}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_{i-1}}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_iP_k}$ lo son, para cualquier $i = 1, \ldots, k$.

(3) En el espacio afín de Volterra, encontrar un sistema de referencia afín que contenga al punto $(1/4, 1/4, 1/2)$. En dicho sistema de referencia, calcular las coordenadas de $(1/3, 1/3, 1/3)$.

(4) Se dice que dos subespacios afines son paralelos si el subespacio director de uno de ellos está contenido en el del otro. Demostrar que dado B un subespacio afín de A y $P \notin B$, entonces existe un único subespacio paralelo a B, de la misma dimensión y que pasa por el punto P.

(5) ¿ Es cierto que dos rectas de un espacio afín siempre son paralelas o tienen intersección no vacía ?

(6) Determinar si los puntos $(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 3)$ y $(2, 4, 6)$ forman un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$.

(7) Calcula dos planos que sean paralelos a la recta $r : \begin{cases} 2x + y - 3 & = 0 \\ -x + y + z + 5 & = 0 \end{cases}$ pero que no sean paralelos entre sí.

(8) Calcula la distancia del punto $p = (5, -1, 6)$ a la recta r : $\begin{cases} 2x + y - 3 & = 0 \\ -x + y + z + 5 & = 0 \end{cases}$

(9) Sea A el espacio afín del ejercicio (1). Demostar que $\mathcal{R} = \{(0,0,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ forman un sistema de referencia afín. Calcular las ecuaciones en $\mathcal{R}$ de la recta que pasa por los puntos $(1,1,2)$ y $(-1,-1,2)$.

(10) Sea A un espacio afín sobre V. Supongamos que dos rectas paralelas r y s cortan a otras dos rectas paralelas r' y s'. Sean $\{A\} = r' \cap s$, $\{B\} = s \cap s'$, $\{C\} = r \cap r'$ y $\{D\} = r \cap s'$ los puntos de dichas intersecciones. Demostrar entonces que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

(11) Estudiar la posición relativa de dos planos afines en $\mathbb{R}^4$.

(12) Encontrar las ecuaciones del subespacio afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por$(1,0,1,0)$ en la dirección del vector $(0,0,1,1)$.

(13) Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo T forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de T y cuyo baricentro es el mismo que el de T.

(14) Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Calcular el baricentro de un paralelogramo.

(15) Sea T un triángulo. Probar que la recta que pasa por el punto medio de un lado y es paralela a un segundo lado corta al tercer lado en su punto medio.

(16) Demostrar que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

(17) Sea T un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud.