

Red Española de Análisis Geométrico

Reunión de investigadores jóvenes

28 - 29 Noviembre 2024

Santiago de Compostela, Spain

Bienvenida

La Red Española de Análisis Geométrico (REAG), financiada por el Ministerio de Economía y Competitividad (RED2022-134077-T), se creó con la finalidad de facilitar el intercambio de ideas y la transferencia de conocimientos entre los grupos españoles de investigación que tienen al Análisis Geométrico como línea común de estudio.

Entre los objetivos de la REAG podemos destacar los siguientes:

- Organizar cursos tanto avanzados como de doctorado, sobre temas de especial relevancia en Análisis Geométrico en este momento.
- Promover el intercambio de profesores/investigadores invitados entre los miembros de la red.
- Promover las visitas de investigadores entre los distintos centros de la red temática.
- Organizar un seminario de estudiantes.
- Organizar una reunión común para los miembros de la red.

El Análisis Geométrico se ocupa de los problemas en los que se unen la Geometría Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales. Pero por su propia naturaleza este área se interrelaciona tanto con otras ramas de las matemáticas (Topología, Análisis, Variable compleja, Probabilidad, etcétera) que podríamos decir que se caracteriza más por el modo de mirar los problemas que por los contenidos.

Los problemas originales de este área suelen venir de la Geometría riemanniana (intrínseca y extrínseca) y de sus relaciones con la Topología y el Análisis, siendo estas relaciones uno de los motores fundamentales del tema.

Contents

Bienvenida	iii
Organization	1
Programa	3
Información práctica	5
Abstracts	7
Jesús Castro Infantes	7
Alberto Cerezo Cid	7
Sandro Caeiro Oliveira	7
Ángel Cidre Díaz	8
José Manuel Fernández Barroso	8
Teo Gil Moreno de Mora Sardà	9
Gianmarco Giovannardi	9
Fernán González Ibáñez	9
Jorge Hidalgo Calderón	10
Juan Manuel Lorenzo Naveiro	10
Diego Mojón Álvarez	10
Vicent Pallardó-Julià	11
Julián Pozuelo Domínguez	11
José S. Santiago Villanueva	12
Silvia Souto Pérez	12
Tjaša Vrhovnik	12
Participantes	15
Alojamiento Hotel México	17

Organization

Comité organizador

Miguel Brozos Vázquez, CITMAga, Universidade da Coruña.
José Carlos Díaz Ramos, CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela.
Miguel Domínguez Vázquez, CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela.
Eduardo García Río, CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela.
Víctor Sanmartín López, CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela.

Patrocinadores

Red Española de Análisis Geométrico (REAG)
Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga)

Información de contacto

eduardo.garcia.rio@usc.es

Programa

Todas las conferencias tendrán lugar en el Salón de Grados de la Facultad de Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela.

Las conferencias serán de 40 minutos, dejando cinco minutos para alguna cuestión rápida, con la idea de fomentar las discusiones durante las pausas de café o la comida.

Horario	28 Noviembre	29 Noviembre
9:30-10:10	Jesús Castro Infantes	Alberto Cerezo Cid
10:15-10:55	Teo Gil Moreno de Mora Sardà	José Manuel Fernández Barroso
11:00-11:30	<i>pausa café</i>	<i>pausa café</i>
11:30-12:10	Juan Manuel Lorenzo Naveiro	José Hidalgo Calderón
12:15-12:55	Diego Mojón Álvarez	Silvia Souto Pérez
13:00-15:30	<i>comida</i>	<i>comida</i>
15:30-16:10	Gianmarco Giovannardi	Vicent Pallardó-Julià
16:15-16:55	Sandro Caeiro Oliveira	Julián Pozuelo Domínguez
17:00-17:40	Fernán González Ibáñez	Tjaša Vrhovnik
17:45-18:25	Ángel Cidre Díaz	José S. Santiago Villanueva

Información práctica

Conexión a internet

Puedes conectarte a internet a través de **eduroam**, siempre que tengas el sistema configurado en tu dispositivo.

Restaurantes

Existen varias opciones para comer cerca de la Facultad de Matemáticas:

- Algunos restaurantes cerca del campus, como *Sicilia in Bocca*, *Santos*, *Xugo*, *Xantar* o *Altamira*, ofrecen menús sobre 12-15 euros.
- Restaurantes veganos y/o vegetarianos en el centro histórico como, por ejemplo *Boca a boca*, *Malak Bistro*, *A Tulla* o *The Veggie Carmen*.
- La cafetería de la Facultad de Matemáticas (en el propio edificio de la reunión), de la Escola Técnica Superior de Enxeñaría - ETSE (200m), o las cafeterías Fonseca y Rodríguez-Cadarso (300m) ofrecen menús por 8.50 euros. Teniendo en cuenta el horario de clases, estas cafeterías están muy concurridas a partir de las 13:30.

Transporte

- El aeropuerto internacional Rosalía de Castro-Lavacolla, está a 15 kms del centro de la ciudad. Hay un servicio de autobús que conecta el aeropuerto con el centro de Santiago. Es posible también desplazarse en taxi, con una tarifa fija de 23€ entre el aeropuerto y cualquier punto de la ciudad.
- La estación de tren está a 5-10 minutos caminando desde el Hotel México, que a su vez se encuentra a 10 minutos de la Facultad de Matemáticas.

Alojamiento

Los participantes tienen reservadas habitaciones en el Hotel México con cargo a la organización (<https://hostalmexico.com/>), situado entre la estación de tren y la Facultad de matemáticas, aproximadamente a 10 minutos caminando entre la estación de tren y la facultad.

Abstracts

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS PARA SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

JESÚS CASTRO INFANTES
(Universidad Politécnica de Madrid)

En 1970, Lawson mostró la existencia de una correspondencia isométrica entre superficies de curvatura media constante en los espacios forma de dimensión 3. Esta correspondencia ha sido empleada para construir numerosos ejemplos de superficies mínimas y de curvatura media constante mediante la técnica conocida como construcciones de Plateau Conjugadas. Esto consiste en resolver un cierto problema de Plateau para encontrar una superficie mínima en un espacio forma y posteriormente considerar su superficie conjugada en otro espacio forma. Un buen ejemplo de esto son varios trabajos de Große-Brauckmann y Karcher.

En esta charla nos centramos en la correspondencia entre superficies mínimas de \mathbb{S}^3 y superficies CMC en \mathbb{R}^3 , construyendo superficies CMC periódicas y superficies CMC con género 0 y 1 y $k \geq 3$ finales asintóticos a onduloideos. Este es un trabajo en proceso junto con Miguel Manzano y José Santiago.

CONSTRUCTION OF FREE BOUNDARY MINIMAL AND CMC ANNULI IN SPACE FORMS

ALBERTO CEREZO CID
(Universidad de Granada / Universidad de Sevilla)

We construct non-rotational, embedded constant mean curvature annuli with free boundary in the unit ball of \mathbb{R}^3 , giving a negative answer to a question posed by Wente in 1995. They constitute the first annular solutions to the partitioning problem in the Euclidean ball that are not rotational. Moreover, we extend this result by constructing examples of free boundary minimal and CMC annuli in geodesic balls of the space forms \mathbb{S}^3 and \mathbb{H}^3 .

This is a joint work with Isabel Fernández and Pablo Mira.

MÉTRICAS HOMOGÉNEAS CRÍTICAS

SANDRO CAEIRO OLIVEIRA
(Universidade de Vigo)

Las métricas de Einstein se corresponden con los puntos críticos del funcional de Hilbert-Einstein restringido a variaciones de volumen constante. Este funcional está determinado por la curvatura escalar, τ , que es el generador de los invariantes escalares de la curvatura de primer orden.

Considerando los invariantes escalares de segundo orden de la curvatura, los funcionales asociados son los llamados funcionales cuadráticos de la curvatura. En dimensiones tres y cuatro, las métricas de Einstein son críticas para todos estos funcionales. En esta charla, mostraremos la clasificación completa de las métricas homogéneas que son críticas para algún funcional cuadrático en dimensión cuatro y mostraremos su relación con los solitones de Ricci y las diferencias con el caso tridimensional.

Esta charla está basada en un trabajo realizado junto a Miguel Brozos Vázquez, Eduardo García Río y Ramón Vázquez Lorenzo [doi.org/10.1090/tran/9219]. .

EL ÍNDICE DE SIMETRÍA DE ESPACIOS SIMÉTRICOS DE TIPO COMPACTO

ÁNGEL CIDRE DÍAZ
(CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela)

Los espacios simétricos son una de las clases de variedades de Riemann mejor entendidas, y que además se puede ver como una generalización inmediata de los espacios forma. El índice de simetría es un invariante geométrico que mide de algún modo lo lejos que está una variedad de Riemann de ser un espacio simétrico. El índice (y el co-índice) de simetría ha sido estudiado principalmente en el contexto de las variedades de Riemann irreducibles, homogéneas y compactas, obteniendo resultados generales de estructura en estos casos.

Dentro de los espacios homogéneos compactos, una clase para la que parece natural calcular el índice de simetría es la de aquellos que son difeomorfos a espacios simétricos de tipo compacto. En concreto, en esta charla nos centraremos en el estudio del índice de simetría para los espacios homogéneos difeomorfos a CROSSes (espacios simétricos de tipo compacto de rango uno). Este es un trabajo conjunto con Carlos Enrique Olmos y Alberto Rodríguez-Vázquez.

ESTUDIANDO PROPIEDADES SYMMETRIC-LIKE EN VARIEDADES RIEMANNIANAS A TRAVÉS DEL ESPECTRO DEL LAPLACIANO

JOSÉ MANUEL FERNÁNDEZ BARROSO
(Universidad de Extremadura)

Las propiedades symmetric-like son aquellas que generalizan a la simetría local en variedades riemannianas. El problema de la audibilidad estudia si estas propiedades pueden ser determinadas utilizando el espectro del laplaciano. Dos variedades riemannianas se dicen isospectrales si existe un operador que intercambia los laplacianos. Si las dos variedades son compactas, esta definición es equivalente a que ambas variedades tengan el mismo espectro, contando las multiplicidades. Para demostrar que una propiedad no puede ser determinada a partir del espectro del laplaciano, basta encontrar un par

de variedades isospectrales que difieran en dicha propiedad. A estas propiedades se las llama inaudibles. En esta charla trataremos distintos ejemplos de variedades isospectrales (compactas y no compactas) con las que demostrar la inaudibilidad de distintas propiedades symmetric-like.

DECOMPOSITION OF COMPLETE 3-MANIFOLDS OF POSITIVE SCALAR CURVATURE WITH SUBQUADRATIC DECAY

TEO GIL MORENO DE MORA SARDÀ
(Université Paris-Est Créteil / Universitat Autònoma de Barcelona)

A fundamental question in the study of three-dimensional manifolds consists in understanding the topological structure of 3-manifolds that admit a Riemannian metric of positive scalar curvature, known as PSC manifolds. In the late 1970s, results by Schoen and Yau based on the theory of minimal surfaces and, in parallel, methods based on index theory developed by Gromov and Lawson, led to the classification of closed orientable PSC 3-manifolds: they are precisely those that decompose as a connected sum of spherical manifolds and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ summands.

We will present a decomposition result for non-compact PSC 3-manifolds: if a complete Riemannian 3-manifold has positive scalar curvature with subquadratic decay at infinity, then it decomposes as a possibly infinite connected sum of spherical manifolds and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. We will also discuss the optimality of this result, which generalises a recent theorem of Gromov and Wang using a more topological approach. It is a joint work with Florent Balacheff and Stéphane Sabourau.

CURVATURE ESTIMATES FOR MINIMAL HYPERSURFACES IN THE HEISENBERG GROUP

GIANMARCO GIOVANNARDI
(Università di Firenze)

In this talk we will solve the Bernstein problem for a broad class of smooth, non-characteristic hypersurfaces in the second sub-Riemannian Heisenberg group \mathcal{H}^2

TORSIONAL RIGIDITY UNDER GEOMETRIC FLOWS

FERNÁN GONZÁLEZ IBÁÑEZ
(Universitat Munster)

We will present the change of the torsional rigidity of a precompact domain in a Riemannian manifold under Inverse Mean Curvature and Ricci Flow on the torsional rigidity. As result we obtain bounds on the torsional rigidity for certain kind of manifolds along this flows. As a further application, we will do explicit computations in Einsteins manifolds and Berger spheres.

SUPERFICIES DE BRYANT

JORGE HIDALGO CALDERÓN
(Universidad de Granada)

Las superficies de curvatura media constante uno en el espacio hiperbólico se conocen también como superficies de Bryant, ya que él introdujo en 1987 una representación holomorfa de estas. Este hecho motivó su estudio mediante técnicas de análisis complejo, y en 2015, A.Alarcón y F.Forstnerič plantearon el siguiente problema: ¿es cualquier superficie de Riemann abierta la estructura compleja de una superficie de Bryant propiamente inmersa? En esta charla contaré el avance en estos últimos años en responder esta pregunta.

SUBVARIEDADES TOTALMENTE GEODÉSICAS EN ESPACIOS NEARLY KÄHLER Y G_2

JUAN MANUEL LORENZO NAVEIRO
(CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela)

Una variedad casi hermitiana (M^{2n}, J) se dice nearly Kähler si la derivada covariante ∇J es totalmente antisimétrica. Dada una 6-variedad (estrictamente) nearly Kähler simplemente conexa $M \neq S^6$, es posible reescalar la métrica de M de tal modo que su cono \widehat{M} tiene holonomía especial G_2 . Un teorema de Butruille afirma que las variedades simplemente conexas, homogéneas, y estrictamente nearly Kähler de dimensión 6 son S^6 , el espacio proyectivo $\mathbb{C}P^3$, la variedad de banderas $F(\mathbb{C}^3)$ y el casi producto $S^3 \times S^3$. Estas caen dentro de la clase de espacios homogéneos naturalmente reductivos, cuya geometría se puede entender puramente en términos de álgebras de Lie.

El objetivo de esta charla es describir la clasificación de las subvariedades totalmente geodésicas de los espacios anteriormente mencionados, así como de sus conos riemannianos. Para ello, introduciremos las herramientas necesarias para poder trabajar con espacios homogéneos naturalmente reductivos y conos, para más adelante ilustrar los ejemplos que aparecen en cada caso.

Esta charla está basada en un trabajo conjunto con Alberto Rodríguez Vázquez (Université Libre de Bruxelles).

ECUACIONES DE EINSTEIN DE VACÍO EN VARIEDADES CON DENSIDAD: CLASIFICACIÓN Y EJEMPLOS

DIEGO MOJÓN ÁLVAREZ
(CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela)

Un espacio-tiempo lorentziano (M, g) puede generalizarse introduciendo una función de densidad h positiva en el elemento de volumen. Para estudiar estas variedades con densidad $(M, g, h \text{dvol}_g)$, se utilizan invariantes ponderados que retienen significados geométricos, a la vez que incluyen información sobre la densidad.

En esta charla, definiré una generalización de las ecuaciones de campo de Einstein a las variedades con densidad (las ecuaciones de campo de Einstein ponderadas), y

me centraré en sus soluciones de vacío. Las geometrías de estas soluciones dependen fuertemente de si ∇h es tipo tiempo o espacio (caso no isotrópico), o es de tipo luz (caso isotrópico). Para ilustrar las propiedades de diferentes soluciones, presentaré algunos teoremas de rigidez locales bajo condiciones en los tensores relacionados con la curvatura. Finalmente, clasificaré las soluciones realizadas en pr-waves (pure radiation waves), una familia de espacio-tiempos de Kundt con interés físico que aparece de manera natural en el estudio de las ecuaciones de campo ponderadas.

REFERENCIAS:

- [1] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez: The vacuum weighted Einstein field equations, arXiv:2407.18791 [math.DG] (2024).
- [2] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez: The vacuum weighted Einstein field equations on pr-waves, arXiv:2407.10535 [math.DG] (2024).
- [3] M. Brozos-Vázquez, D. Mojón-Álvarez: Vacuum Einstein field equations in smooth metric measure spaces: the isotropic case, *Class. Quantum Grav.* **39** (13) (2022) 135013, 20 pp <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ac72e9>.

ON THE MANIFOLD-VALUED ROF MODEL

VICENT PALLARDÓ-JULIÀ
(Universidad de Valencia)

In this talk, we study the manifold-valued Rudin-Osher-Fatemi (ROF) model, which involves an initial datum f mapping from an open 2-dimensional domain to an open connected smooth n -dimensional Riemannian manifold. Firstly, we prove the existence and uniqueness of minimizers (subject to a curvature condition). Secondly, we present a series of regularity results on the associated PDE system of a relaxed functional with Neumann condition. Finally, we apply these results to the ROF model to obtain Lipschitz regularity of minimizers. It is a joint work with Esther Cabezas-Rivas and Salvador Moll.

LA ECUACIÓN DE CURVATURA MEDIA PRESCRITA EN GRUPOS DE HEISENBERG

JULIÁN POZUELO DOMÍNGUEZ
(Universidad de Granada)

En esta charla hablaremos sobre la existencia de grafos sobre un dominio acotado del plano con curvatura media prescrita H . Dicho problema junto a una condición de Dirichlet es el problema de Plateau y en el espacio Euclídeo se pueden encontrar soluciones para cualquier condición de Dirichlet mientras H sea menor en valor absoluto que el mínimo de la curvatura media del borde del dominio. Quizás menos conocido sea el problema sin imponer condiciones de Dirichlet, donde la existencia para H constante está caracterizada mediante la constante de Cheeger del dominio y la unicidad se obtiene cuando la solución es vertical en todo punto de la frontera del dominio.

El objetivo de esta charla es estudiar estos dos problemas en grupos de Heisenberg riemannianos y, mediante un paso al límite en sentido de Gromov-Hausdorff, estudiar sus contrapartes sub-riemannianos.

EL PROBLEMA DE BONNET EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS

JOSÉ S. SANTIAGO VILLANUEVA
(Universidad de Jaen)

Es bien sabido que una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 está totalmente determinada por su métrica y por su segunda forma fundamental, esto es, si una superficie riemanniana (Σ, ds^2) y un endomorfismo autoadjunto $S : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ verifican las ecuaciones de Gauss y Codazzi, entonces existe una única inmersión de esta superficie en \mathbb{R}^3 salvo isometrías del ambiente. Veremos cómo generalizar estas ecuaciones para en el caso de espacios homogéneos.

Por su parte, en 1867, Bonnet propuso un problema más general: ¿qué puede decirse sobre las inmersiones de superficies riemannianas si tan sólo conocemos la traza de S ? Este problema ha sido ampliamente tratado por Bobenko, Kamberov, Pedit y Pinkall. De forma más reciente, Gálvez, Martínez y Mira han dado una respuesta a este problema para espacios homogéneos $E(k, t)$ con grupo de isometrías de dimensión 4. En esta charla usaremos estas ecuaciones de compatibilidad generalizadas para afinar más el resultado propuesto por Gálvez, Martínez, Mira.

REDUCCIÓN POR SIMETRÍAS DE SISTEMAS LAGRANGIANOS DE CONTACTO

SILVIA SOUTO PÉREZ
(CITMAga, Universidade de Santiago de Compostela)

En esta charla estudiaremos el proceso de reducción en sistemas lagrangianos de contacto cuya función lagrangiana permanece invariante bajo la acción de un grupo de simetrías. Estas nos permitirán reducir el número de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema, obteniendo así las llamadas ecuaciones de Lagrange-Poincaré-Herglotz.

THE MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR PROPER MINIMAL SURFACES AND DIRECTED MEROMORPHIC CURVES

TJAŠA VRHOVNIK
(Universidad de Granada)

Given an open Riemann surface M and a closed conical complex subvariety $A \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 3$), a holomorphic map $F : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ is an *A-immersion* if its complex derivative F' on M with respect to any local holomorphic coordinate on M assumes values in $A_* = A \setminus \{0\}$. Given a closed discrete subset $E \subset M$, by a *meromorphic A-immersion* $M \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n$ we mean a holomorphic *A-immersion* $M \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n$ extending to M as a meromorphic map with effective poles at all points in E .

We aim to connect this notion to a well-known result from complex analysis, the Mittag-Leffler theorem from 1884, which states that for any closed discrete subset $E \subset \mathbb{C}$ and a meromorphic function f on a neighbourhood of E there exists a meromorphic function g on \mathbb{C} which is holomorphic on $\mathbb{C} \setminus E$ and the difference $g - f$ is holomorphic

at every point of E . This was extended by H. Florack in 1948 to functions on open Riemann surfaces. In 2022, A. Alarcón and F. J. López [2] proved an analogue of the Mittag-Leffler theorem for complete conformal minimal surfaces in \mathbb{R}^n , including approximation and interpolation (see also [3,Chapter 3]). We generalize the latter to obtain a Mittag-Leffler-type theorem for proper directed immersions $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ on any open Riemann surface M and state some consequences describing properties of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . This is joint work with Antonio Alarcón.

REFERENCIAS:

- [1] A. Alarcón and F. Forstnerič. Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces. *Invent. Math.*, 196(3):733–771, 2014.
- [2] A. Alarcón and F. J. López. Algebraic approximation and the Mittag-Leffler theorem for minimal surfaces. *Anal. PDE*, 15(3):859–890, 2022.
- [3] A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. *Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint*. Springer Monogr. Math. Cham: Springer, 2021.

Participantes

1. Miguel Brozos Vázquez, Universidade da Coruña.
2. Jesús Castro Infantes, Universidad Politécnica de Madrid.
3. Alberto Cerezo Cid, Universidad de Granada / Universidad de Sevilla.
4. Sandro Caeiro Oliveira, Universidade de Vigo.
5. Ángel Cidre Díaz, Universidade de Santiago de Compostela.
6. José Carlos Díaz Ramos, Universidade de Santiago de compostela.
7. Miguel Domínguez Vázquez, Universidade de Santiago de Compostela.
8. José Manuel Fernández Barroso, Universidad de Extremadura.
9. Eduardo García Río, Universidade de Santiago de compostela.
10. Teo Gil Moreno de Mora Sardà, Université Paris-Est Créteil / Universitat Autònoma de Barcelona.
11. Gianmarco Giovannardi, Università di Firenze.
12. Fernán González Ibáñez, Universitat Munster.
13. Diego González del Río, Universidade de Santiago de Compostela.
14. Jorge Hidalgo Calderón, Universidad de Granada.
15. Juan Manuel Lorenzo Naveiro, Universidade de Santiago de Compostela.
16. Diego Mojón Álvarez, Universidade de Santiago de Compostela.
17. Vicent Pallardó-Julà, Universidad de Valencia.
18. Julián Pozuelo Domínguez, Universidad de Granada.
19. Rosalía Rodríguez-Gigirey Villar, Universidade de Santiago de Compostela
20. Mario Julián Rodríguez Sánchez de Toca, Universidade de Santiago de Compostela
21. Alberto Rodríguez Vázquez, Université Libre de Bruxelles.
22. Víctor Sanmartín López, Universidade de Santiago de Compostela.
23. Silvia Souto Pérez, Universidade de Santiago de Compostela
24. José S. Santiago Villanueva, Universidad de Jaen.
25. Tjaša Vrhovnik, Universidad de Granada.