

Relación de ejercicios del tema 3

Matemáticas. Ciencias Ambientales
Curso 2024/25. Grupo C.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcula: AB , $D + E$, $D - E$, DE , ED , BC , $C^t B$.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},$$

calcula la matriz X de orden 2×2 que es solución de las ecuaciones

- (a) $BX = C$.
 - (b) $AX - B = C$.
 - (c) $XC^t = B$.
3. Considerando matrices cuadradas de orden 2, probar mediante contraejemplos que, en general, no son ciertas las igualdades siguientes:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

4. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Probar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = aI_n$.

5. Calcula las inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Hallar el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar el rango de las siguientes matrices según el valor de los parámetros

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

8. Hallar la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Una matriz cuadrada A se llama diagonal si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Probar que una matriz diagonal es regular si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para todo i . En tal caso, hallar una expresión de la matriz inversa.

10. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{vmatrix} 3 & 5a \\ 4 & -2a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7a & 6a \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a \\ a & -a \end{vmatrix} \\ \text{(b)} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \text{(c)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

11. Probar que las siguientes matrices son regulares y hallar sus matrices inversas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Probad que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ satisface $A^{-1} = A^t$.

13. Comprueba que los siguientes determinantes son nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3+x \\ 2 & 6 & y & 8+y \\ -3 & 7 & z & 4+z \\ -5 & 5 & w & w \end{vmatrix}$$

14. Discutir y resolver según los parámetros los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + ay + az = 5 \\ 4x + ay = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 4y - 5z = 3 \\ -x + 3y + az = -4 \end{cases}$$

15. Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 4y - 5z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - 3z = a \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ ax + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + t = a \\ x - 2y + z = 1 \\ -x + y + az - t = 0 \end{cases}$$

16. Discutir y resolver en función de los parámetros los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a)

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

17. Resolved el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ -x + 5y + 2z &= 0 \end{cases}$$

18. Discutid y resolved los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en función de sus parámetros:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z &= a \\ x + z &= b \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 3x + ay + az &= 5 \\ 4x + ay &= 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 5 \\ 3x + 4y - 2z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= a \end{cases} \quad (d) \begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x - y + 3z &= 2 \end{cases}$$

19. Dependiendo del parámetro $a \in \mathbb{R}$, discutir y resolver en su caso, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = -2 \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

20. Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones según el parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y &= 1 \\ x + y &= 2 \\ 2x + ay &= 2a \end{cases}$$

21. Según los parámetros a, b discutir el sistema siguiente. Resolver en un caso.

$$\begin{cases} x + ay + z &= 1 \\ -x + y + z &= b \\ 2x + y - z &= 1 \end{cases}$$

22. En función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, hallar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2a - 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -2a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$