Comprando nuggets de pollo

Pedro A. García Sánchez

Departamento de Álgebra e Instituto de Matemáticas
Universidad de Granada

Nuestros protagonistas

No hace mucho tiempo las cajas de McNuggets de pollo venían en cajas de seis, nueve y veinte

¿Cuántas nuggets se pueden comprar sin desperdiciar nuggets de las cajas?

Por ejemplo, podemos comprar $0, 6, 9, 12 = 2 \times 6, 15 = 6 + 9$, ...

$$0, 6, 9, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, \rightarrow$$

Algebrización del problema

Para un número determinado de nuggets, digamos n, estamos buscando tres enteros no negativos x, y, y z tales que

$$6x + 9y + 20z = n$$

Observemos que queremos resolver el problema sobre los números enteros no negativos $\{0, 1, 2, \ldots\}$ y no sobre los racionales ($\mathbb{Q}$) ni sobre los enteros ($\mathbb{Z}$)

No podemos usar Gauss-Jordan ni algoritmo extendido de Euclides

Algunas consideraciones previas

Para algunas cantidades de nuggets, podemos tener diferentes opciones de compra; por ejemplo, podemos obtener 18 nuggets comprando tres cajas de seis, o bien dos cajas de nueve

- $6 \times 3 = 18$ ($(x, y, z) = (3, 0, 0)$ en la ecuación $6x + 9 + y + 20z = 18$)
- $9 \times 2 = 18$ ($(x, y, z) = (0, 2, 0)$)

Si somos capaces de comprar seis cantidades consecutivas de nuggets, por ejemplo $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$, entonces podemos comprar cualquier cantidad de nuggets que sea superior a n (siempre que haya existencias en la tienda)

El primero de los n que cumple esa condición en nuestro caso es 44 (se le llama **conductor**); no podemos obtener 43 nuggets, y es la cantidad más grande que no podemos obtener (el **número de Frobenius**)

Primeros problemas

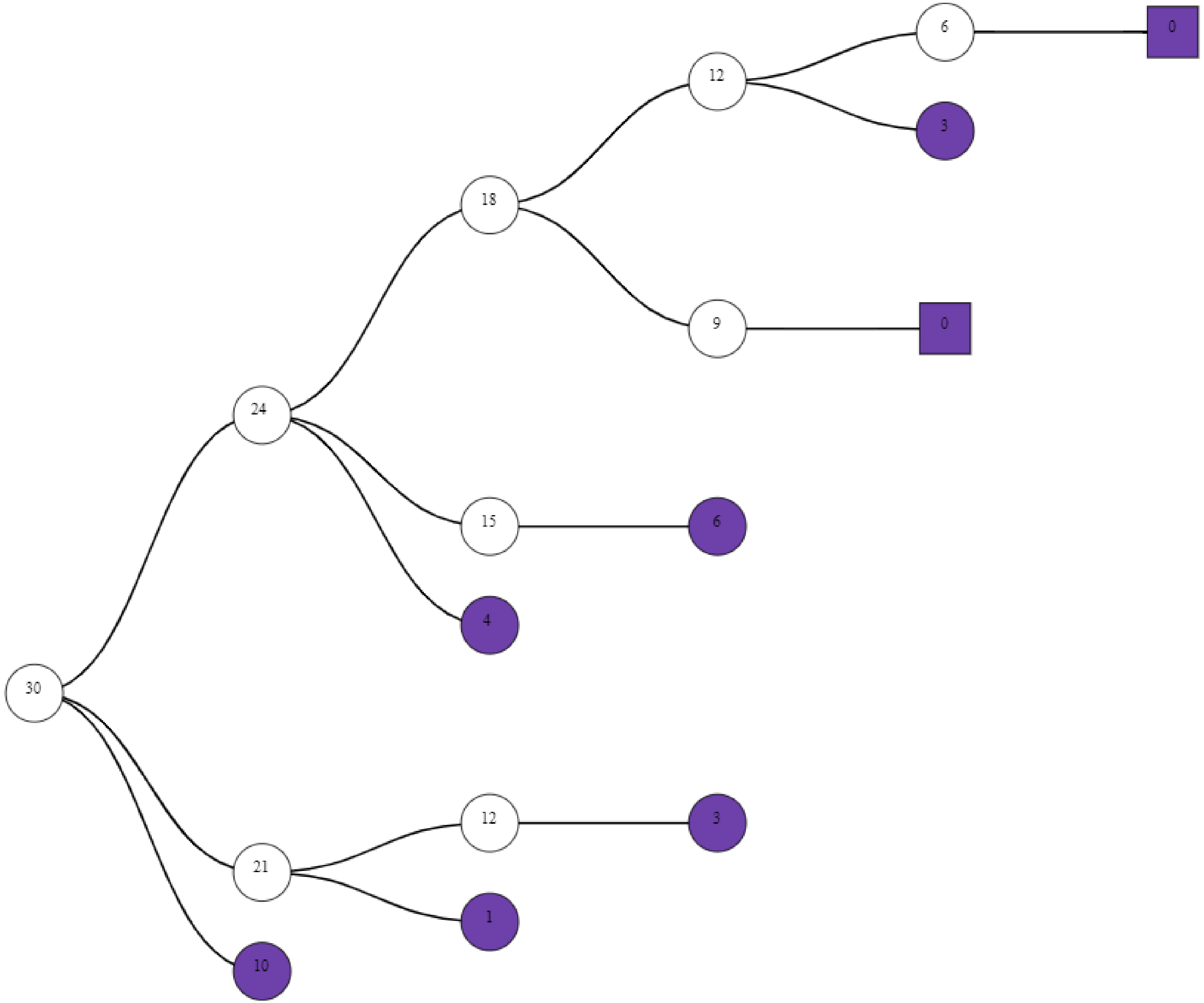
- El primer problema es si podemos o no comprar una determinada cantidad de nuggets con los tamaños de caja disponibles (supondremos que las provisiones son inagotables); este es el problema de la *solución factible*
- El segundo, es si una solución es factible, de cuántas formas podemos comprar ese número de nuggets (*problema de enumeración*; *denumerante*)
- Otro problema es determinar, de todas las soluciones, cuál es la más barata (*programación lineal entera*)
- De entre todas las cantidades que no podemos comprar, ¿cuál es la más grande? (*problema de Frobenius* - Wolfram Alpha)

¿Existe solución? (ese día no nos vamos sin comer)

Existen varias formas de atacar este problema, pero vamos a mostrar la más sencilla, conocida como la "cuenta de la vieja"

Supongamos que queremos saber si podemos comprar 30 nuggets

- Seremos capaces de comprar esa cantidad si y sólo si somos capaces de comprar como mínimo una de las siguientes cantidades: $30 - 6$, $30 - 9$ ó $30 - 20$
- Esto abre tres posibilidades, y empezamos de nuevo con cada una de ellas, paramos cuando lleguemos a cero o alcancemos un número negativo
- De esta forma tenemos un árbol con distintas cantidades, las hojas son cero o números negativos
- Si tenemos alguna hoja con 0 nuggets, hemos encontrado una solución; de hecho todas las soluciones son hojas con 0 nuggets: seis cajas de seis, o dos cajas de seis y dos de nueve


30
24
21
10
18
15
4
12
1
12
9
6
3
6
3
0
0

Usando trueques para encontrar todas las soluciones

Hay muchas formas de contar o de encontrar todas las posibles soluciones, algunas de ellas vienen de principios del siglo pasado, pero ya volveremos a eso después

Para encontrar las todas las soluciones hablaremos de *trueques*

Recordemos que teníamos dos formas de comprar 30 nuggets: cinco cajas de seis, o dos de seis y dos de nueve

Sabemos que tres cajas de seis tienen los mismos nuggets que tres de nueve (esto es un trueque)

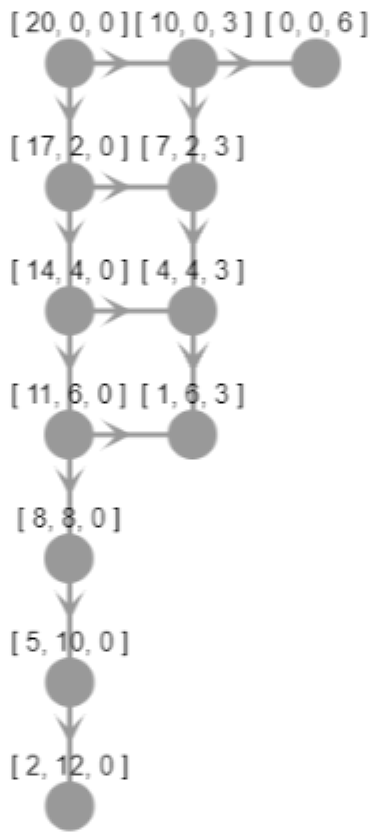
Por tanto, en la combinación de cinco cajas de seis, si cambiamos tres de ellas por dos de nueve, nos da la otra solución

Otro posible trueque: podemos comprar tres cajas de veinte o bien una de seis más seis de nueve; en ambos casos obtenemos 60 nuggets

¿Cuántos trueques hacen falta?

Se puede probar que con dos tipos de trueques podemos *movernos* por todas las soluciones

Existen otras posibles parejas de trueques: podemos cambiar el segundo trueque por "comprar diez cajas de seis es lo mismo que comprar tres de veinte"



Encontrando el número de soluciones con funciones generatrices

Idea: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$

Así, $\dfrac{1}{1-x^6} = 1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + \cdots + x^{6n} + \ldots$

Hacemos lo mismo con $\dfrac{1}{1-x^9}$ y $\dfrac{1}{1-x^{20}}$

Multiplicamos y la propiedad distributiva hace el resto (ver en Wolfram Alpha)

$$\frac{1}{(1-x^6)(1-x^9)(1-x^{20})} = 1 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + 2x^{18} + x^{20}$$
$$+x^{21} + 2x^{24} + x^{26} + 2x^{27} + x^{29} + 2x^{30} + x^{32} + 2x^{33} + x^{35} + 3x^{36}$$
$$+2x^{38} + 2x^{39} + x^{40} + x^{41} + 3x^{42} + 2x^{44} + \ldots$$

Esto nos dice, por ejemplo, que tenemos dos posibilidades para comprar 30 nuggets

Combinación más barata (programación lineal entera)

Supongamos que nos importa el precio que vamos a pagar y que queremos encontrar la combinación más barata (no tiene por qué ser única)

Imaginemos que los precios de las cajas son: tres euros para las de seis, cuatro para las de nueve, y siete para las de veinte

Nuestro problema es, para una cantidad n de nuggets, minimizar $3x + 4y + 7y$ sujeto a $6x + 9y + 20z = n$

Existen muchas publicaciones al respecto, y también programas que resuelven este tipo de problemas (tanto gratuitos como comerciales - mucha gente gana mucho dinero con esto)

La forma más barata de comprar 120 nuggets con estos precios es pedir seis cajas de veinte nuggets (esto lo he hecho a lo bruto con una máquina)

¿Qué pasa si cambiamos el tamaño de las cajas?

Siempre que el máximo común divisor de los tamaños sea uno, tendremos un conductor (a partir de una número podremos comprar todas esas cantidades)

- No hay "fórmula algebraica" para el conductor en términos del tamaño de las cajas (sólo hay para ciertos tipos de cajas)
- Las cantidades que no podemos comprar se conocen como *huecos*; el número de huecos se llama *género* para esa configuración: no hay fórmula tampoco para el género
- El número de trueques es dos o tres como mucho

¿Qué pasa si tenemos más de tres tipos de cajas?

Para dos cajas la cosa es relativamente sencilla, el problema lo propuso Frobenius y uno de los primeros en resolverlo fue Sylvester

Para más de tres, la cosa se pone fea

- No hay cotas para el número de trueques a partir del número de tipos de cajas
- El problema de determinar el número de Frobenius (o el conductor) se convierte en un problema duro, y por supuesto, no hay fórmula general
- Tampoco la hay para el género (número de huecos)
- No hay fórmulas para el número de combinaciones que podemos escoger para las cantidades de nuggets que podemos comprar (denumerante)

La estructura que hay detrás de este problema

Si podemos comprar n y n' nuggets:

$$n = 6x + 9y + 20z$$

$$n' = 6x' + 9y' + 20z'$$

Entonces podemos comprar $n + n'$ nuggets

$$n + n' = 6(x + x') + 9(y + y') + 20(z + z')$$

Luego el conjunto que de nuggets que podemos comprar es *cerrado para la suma*, y además podemos decidir no comprar ningún nugget

A estos conjuntos se les llama **monoides**, estos en particular, se llaman **semigrupos numéricos**

Son tan sencillos que apenas se "ven en la carrera"

Contando semigrupos numéricos

Hay 103246 semigrupos numéricos con el mismo número de huecos que nuestro monoide de nuggets

```
gap> Genus(s);
22
gap> Length(NumericalSemigroupsWithGenus(22));time;
103246
```

De ellos 546 tienen la misma simetría

El número de semigrupos numéricos con 70 huecos es 1607394814170158 (fuente) y la carrera continúa

Hasta género 60 ocupan unos 14TB

Algunas referencias

- Chapman, Scott T.; García, Rebecca; O'Neill, Chris. Beyond Coins, Stamps, and Chicken McNuggets: an Invitation to Numerical Semigroups, arXiv
- Chapman, Scott T.; O'Neill, Chris. Factoring in the Chicken McNugget monoid. Math. Mag. 91 (2018), no. 5, 323-336 (disponible en arXiv)
- Chapman, Scott; García-Sánchez, Pedro; O'Neill, Christopher. Distances between factorizations in the Chicken McNugget monoid. College Math. J. 52 (2021), no. 3, 158-176 (disponible en arXiv)

Para ver algunos gráficos y cómo hacer cuentas con el ordenador: https://numerical-semigroups.github.io/Nuggets/