Dos días sobre Polinomios Ortogonales (D2PO). Granada, 3–4 de diciembre de 2018.

Álgebra Lineal Numérica para Funciones Racionales Ortogonales

Ruymán Cruz-Barroso[1]

Funciones racionales ortogonales en la circunferencia unidad generalizan a los polinomios de Szegő (polos en el infinito) y a los polinomios de Laurent ortogonales (polos en el origen y en el infinito).

Si μ es la medida de ortogonalidad con soporte en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ y L^2_μ es el correspondiente espacio de Hilbert, es bien sabido que el operador de multiplicación $\mathcal{T} : L^2_\mu \to L^2_\mu$: $f(z) \to zf(z)$ restringido a polinomios tiene una representación con respecto a los polinomios ortogonales con estructura de Hessenberg ($\mathcal{H}$), mientras que si en vez de una base de polinomios ordinarios consideramos una base de polinomios de Laurent, alternando polos en el origen y en el infinito, entonces la matriz de representación tiene estructura penta-diagonal, o matriz CMV ($\mathcal{C}$). Estos resultados fueron generalizados en [2] considerando un reordenamiento arbitrario de polos en el origen y en el infinito, dando lugar a una representación matricial "en forma de serpiente"($\mathcal{S}$) que generaliza a las dos anteriores. Por otro lado, la generalización al contexto racional de las matrices $\mathcal{H}$ (polos en el exterior de $\mathbb{T}$) y $\mathcal{C}$ (alternando polos en el exterior y en el interior de $\mathbb{T}$) fueron abordadas en [3], siendo ahora ciertas transformaciones matriciales de Möbius de las matrices $\mathcal{H}$ y $\mathcal{C}$ las matrices de representación del operador de multiplicación.

En esta charla consideraremos funciones ortogonales racionales con una distribución arbitraria de polos situados en cualquier parte del plano complejo extendido salvo en la circunferencia unidad (véase [1]), y probaremos que la matriz de representación del operador de multiplicación en este caso viene dada por una transformación matricial de Möbius de la matriz serpiente $\mathcal{S}$. Para la obtención de este resultado es necesario interpretar la ley de recurrencia para las funciones racionales ortogonales como factorización de ciertas transformaciones unitarias elementales, verificándose que el espectro de la matriz resultante es independiente del orden en el que estos factores elementales son multiplicados. Este resultado, desconocido por lo que sabemos hasta la fecha dentro del Álgebra Lineal Numérica, permite establecer, en particular, conexiones con problemas de autovalores directos e inversos, e introducir un nuevo tipo de matrices en la literatura: matricies AMPD.

El contenido de esta charla es parte de un trabajo en colaboración con Adhemar Bultheel (KU Leuven, Bélgica) y Andreas Lasarow (Leipzig, Alemania).

Referencias

[1] A. Bultheel, R. Cruz-Barroso and A. Lasarow, Orthogonal Rational Functions on the Unit Circle with Prescribed Poles not on the Unit Circle, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **13** (2017), 1–49.

[2] R. Cruz-Barroso and S. Delvaux, Orthogonal Laurent Polynomials on the unit circle and snake-shaped matrix factorizations, *Journal of Approximation Theory* **161** (2009), 65–87.

[3] L. Velázquez, Spectral Methods for orthogonal rational functions, *Journal of Functional Analysis* **254** (2008), 954–986.

[1]Departamento de Análisis Matemático,
Universida de La Laguna,
La Laguna, Santa Cruz de Tenerife, 38271, Islas Canarias, España.

rcruzb@ull.es