Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 1 - Sistemas de ecuaciones lineales (con soluciones)

1. Sean A y B matrices $m \times n$ tales que $A\mathbf{x}^t = B\mathbf{x}^t$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ¿Qué relación hay entre A y B?

   Solución. Sea $\mathbf{e}_j^t$, $1 \leqslant j \leqslant N$, el vector columna $n \times 1$ cuyas componentes son todas nulas excepto la que ocupa la fila i que vale 1. Por la hipótesis hecha, se verificará que $A\mathbf{e}_j^t = B\mathbf{e}_j^t$. Y teniendo en cuenta $A\mathbf{e}_j^t$ es la columna j de la matriz A y que $B\mathbf{e}_j^t$ es la columna j de la matriz B, deducimos que $A = B$.

2. Calcula una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ sabiendo que su producto por los vectores columna $(1, 2, -2)^t$, $(2, 1, -2)^t$, $(-1, 0, 1)^t$ es respectivamente igual a los vectores columna $(3, 1, -3)^t$, $(4, -1, -1)^t$, $(-2, 1, 0)^t$.

   Solución. Los datos que nos dan pueden escribirse matricialmente en la forma $AB = C$ donde

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como la matriz B tiene determinante distinto de cero, es inversible. Basta entonces calcular la matriz inversa B^{-1} para obtener $A = CB^{-1}$.

3. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que la suma de los elementos de cada fila es cero. Prueba que A no es inversible.

   Solución. Lo que nos dicen implica que la suma de todas las columnas de A es el vector cero. Por tanto, las columnas de A son linealmente dependientes y, por las propiedades de los determinantes, concluimos que el determinante de A es cero.

   También podemos razonar como sigue. Consideremos el SEL homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas $A\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$. Dicho SEL admite, como todo SEL homogéneo, la solución trivial $\mathbf{x}^t = \mathbf{0}$. El enunciado del ejercicio nos dice que también admite la solución $(1, 1, \dots, 1)^t$. Luego dicho SEL es compatible indeterminado y, por tanto, el determinante de A es cero.

4. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

   Solución.

   $$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calcula la forma canónica de Hermite de las matrices:

   $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Solución. La forma de Hermite de la primera matriz es

   $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La segunda matriz tiene como forma de Hermite la matriz identidad I_5.

6. Resuelve por el método de eliminación de Gauss–Jordan los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_1+x_2+x_3-x_4 & = & -2 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4 & = & 0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4 & = & 1 \\ x_1+x_2+3x_3-3x_4 & = & -8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcr} 2x-3y & = & 8 \\ 4x-5y+z & = & 15 \\ 2x \qquad +4z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución. Los dos sistemas son compatibles determinados con soluciones únicas $x_1=0, x_2=1,$ $x_3=-1, x_4=2$ y $x=17/2, y=3, z=-4$. Pueden resolverse fácilmente por el método de Gauss–Jordan.

7. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Indicar condiciones que debe cumplir el vector $Y=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ para que el sistema $AX=Y$ sea compatible.

Solución. Debe cumplirse que $2a-b+2c=0$. A esa condición se llega o bien haciendo transformaciones elementales en la matriz ampliada para obtener una matriz de rango 2 cuya última fila es $\left(0,0,0,a+c-\frac{b}{2}\right)$, o también imponiendo que el rango de la matriz ampliada sea igual a 2 que es el rango de la matriz de los coeficientes.

8. Para hacer un plaguicida se necesitan 6 litros del compuesto A; 7 litros del compuesto B y 10 litros del compuesto C. El producto comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos compuestos. El producto comercial Y contiene 1,1 y 2 partes, y el producto comercial Z contiene dichos compuestos en partes iguales. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto comercial se necesita para obtener la mezcla deseada?

Solución. Sean x, y, z los litros que usaremos de X, Y y Z respectivamente. Debe cumplirse que:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{5}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=6 \\ \frac{2}{5}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=7 \\ \frac{2}{5}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=10 \end{array}\right.$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución única es $x=5$, $y=12$, $z=6$.

9. Calcula una parábola cuya gráfica pasa por los puntos $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$.

Solución. La ecuación de una parábola es del tipo $y=ax^2+bx+c$. Hay que imponer que la gráfica de dicha parábola pase por los puntos $(2,0)$, $(3,0)$ y $(-1,12)$, lo que da lugar a un SEL cuya solución única es $a=1, b=-5, c=6$.

10. Calcula a,b,c y d de forma que para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$, se verifique la igualdad

$$\frac{x^3-7x^2+9x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Solución. Se multimplica la igualdad por $(x-1)^2(x^2+1)$, se hacen los productos indicados y se obtiene a la derecha un polinomio de grado 3 cuyos coeficientes dependen de a,b,c,d. Se identifica dicho polinomio con x^3-7x^2+9x-1 igualando los coeficientes de las respectivas potencias de x, con ello se obiene un SEL de 4 ecuaciones con 4 incógnitas a,b,c,d que, escrito en forma vectorial, es

$$(a-b+d, b+c-2d, a-b-2c+d, b+c)=(-1,9,-7,1)$$

cuya solución única es $a=1, b=-2, c=3, d=-4$.

11. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Además, la cifra de las decenas es igual a la media aritmética de las otras dos. Calcula dicho número.

    Solución. Si el número es abc, la información que dan conduce al sistema

    $$\big(a+b+c, 100a+10b+c-100c-10b-a, b\big) = \big(21, 198, \frac{a+c}{2}\big)$$

    Se trata del número 876.

12. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros a, b.

    $$\left\{\begin{array}{rl} 2x+ay-z &= 0 \\ x-ay &= 3 \\ 2ax+y-z &= 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} -x+ay-z &= 2 \\ x+y-az &= 3a+1 \\ ax-y-z &= 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{array}\right.$$

    Solución. El determinante de la matriz de los coeficientes del primer sistema es $-1+3a-2a^2$. Por tanto, si $-1+3a-2a^2 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $-1+3a-2a^2 = 0$, es decir, $a = 1$ o $a = 1/2$, entonces la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

    El determinante de la matriz de los coeficientes del segundo sistema es $2+3a-a^3$. Por tanto, si $2+3a-a^3 \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $2+3a-a^3 = 0$, entonces $a = -1$ o $a = 2$. Para $a = -1$ el sistema se reduce a una sola ecuación $x+y+z = -2$ y es un sistema compatible indeterminado con dos variables libres y, z, que pueden tomar cualquier valor, cuya solución es $x = -2-y-z$. Para $a = 2$ la matriz ampliada tiene rango 3 y el sistema es incompatible.

    El determinante de la matriz de los coeficientes del tercer sistema es $b(a^3-3a+2)$. Por tanto, si $b(a^3-3a+2) \neq 0$, el sistema es compatible determinado y sus soluciones se calculan fácilmente por la regla de Cramer. Si $b = 0$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Si $b = 0$ y $a = 1$ el sistema se reduce a dos ecuaciones $x+z = 1$ y $x+z = 0$, por lo que es claramente incompatible (el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada es 2). Las soluciones de $a^3-3a+2 = 0$ son $a = 1$ y $a = -2$. Si $b \neq 0$ y $a = 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 1, y, si $b \neq 1$, el rango de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es incompatible. Si $a = 1$ y $b = 1$ el sistema se reduce a una ecuación $x+y+z = 1$. Cuando $b \neq 0$ y $a = -2$, el rango de la matriz ampliada es 3 si $b \neq -2$ y el sistema es incompatible; si $b = -2$ el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, cuyas soluciones vienen dadas en función de la variable libre z.

13. Ajusta las siguientes reacciones químicas para que el número de átomos de cada elemento antes y después de la reacción sea el mismo.

    a) $\mathrm{NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \to Na_3C_6H_5O_7 + H_2O + CO_2}$.
    b) $\mathrm{KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \to MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4}$.
    c) $\mathrm{PbN_6 + CrMn_2O_8 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO}$.

    Solución. Planteamos la primera reacción, las otras son parecidas. Se trata de encontrar números enteros positivos $\mathrm{x, y, z, u, v}$ tales que escribiendo

    $$\mathrm{x\,NaHCO_3 + y\,H_3C_6H_5O_7 \to z\,Na_3C_6H_5O_7 + u\,H_2O + v\,CO_2}$$

    los átomos de cada elemento antes y después de la reacción sean los mismos. Resulta así, igualando átomos de sodio, hidrógeno, carbono y oxígeno, en ese orden, el siguiente SEL que, por comodidad, represento en forma vectorial:

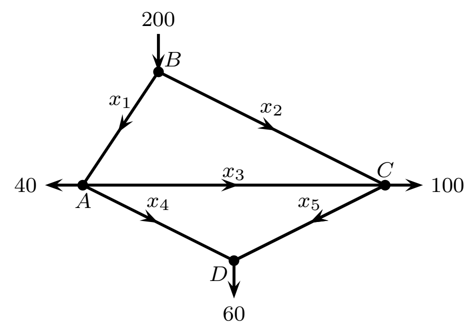
    $$\mathrm{(x, x+8y, x+6y, 3x+7y) = (3z, 5z+2u, 6z+v, 7z+u+2v)}$$

Dicho SEL puede resolverse por el método de Gauss-Jordan. Es un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas y la matriz de los coeficientes tiene rango 4 por lo que una variable, v (la que no tiene pivote), queda libre y las demás se expresan en función de ella. La solución es $\mathrm{x}=\mathrm{v}, \mathrm{y}=\mathrm{v}/3, \mathrm{z}=\mathrm{v}/3, \mathrm{u}=\mathrm{v}$. Como buscamos soluciones enteras positivas, lo natural es hacer $\mathrm{v}=3$ con lo cual $\mathrm{x}=3, \mathrm{y}=1, \mathrm{z}=1, \mathrm{u}=3, \mathrm{v}=3$.

REDES

Una *red* consiste en un conjunto de puntos o *nodos* interconectados con líneas o *arcos*. La dirección del flujo se indica por flechas, y la cantidad de flujo en cada arco o bien es un dato conocido o una variable. Como el flujo que entra en la red es el mismo que sale, y el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del mismo, se obtienen sistemas de ecuaciones lineales cuya solución permite analizar el flujo en la red.

14. Analiza el flujo de la red de calles que se muestra en la figura (las tasas de flujo se dan en automóviles por minuto). ¿Qué valor mínimo tiene x_1 cuando $x_4=0$?



Solución. Observa que el flujo que entra en la red es igual al que sale. Tenemos cuatro ecuaciones, una por cada nodo A, B, C, D. Igualamos en cada caso el flujo entrante al flujo saliente:

$$(x_1, 200, x_2+x_3, x_4+x_5) = (x_3+x_4+40, x_1+x_2, x_5+100, 60)$$

La matriz de los coeficientes del sistema es (indico las filas de la matriz):

$$\big((1,0,-1,-1,0),(-1,-1,0,0,0),(0,1,1,0,-1),(0,0,0,1,1)\big)$$

Cuya forma de Hermite es

$$\big((1,0,-1,0,1),(0,1,1,0,-1),(0,0,0,1,1),(0,0,0,0,0)\big)$$

Es, por tanto, una matriz de rango 3 y las variables x_3 y x_5 no tienen pivote. Se trata, por tanto, de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones vienen dadas en función de x_3 y x_5 como sigue: $x_1 = 100+x_3-x_5, x_2 = 100-x_3+x_5, x4 = 60-x_5$. Si $x_4=0$, entonces $x_5=60$ y $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$. Como todas las soluciones deben ser mayores o iguales que 0, deducimos que $0 \leqslant x_3 \leqslant 160$ y $40 \leqslant x_1 \leqslant 200$.

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La **Ley de Ohm** establece que la *diferencia de potencial* V, medida en voltios (V), entre dos puntos de un circuito cerrado, es igual a la *intensidad*, I, medida en amperios (A), de la corriente que circula por dicho circuito multiplicada por la *resistencia* total R, medida en ohmios (Ω), que oponen al paso de la misma los elementos del circuito comprendidos entre dichos puntos. Esto es lo que significa la igualdad $V=IR$.

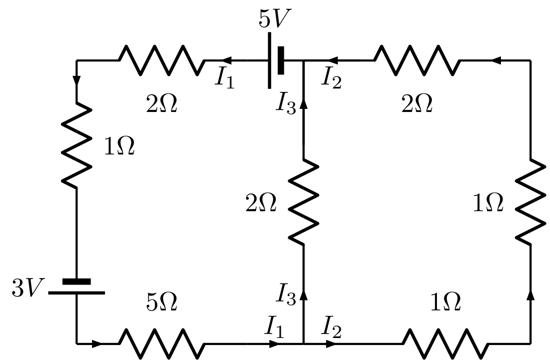
Leyes de Kirchhoff

La suma de las corrientes (intensidades) que entran en un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo (un nodo es un punto de una red eléctrica en el cual convergen tres o más conductores).

La suma algebraica de las diferencias de potencial entre los extremos de los distintos elementos que forman un circuito cerrado, tomadas todas en el mismo sentido, es igual a cero.

Hay que tener en cuenta que las direcciones asignadas a las corrientes en cada circuito son arbitrarias. Si una corriente resulta ser negativa, entonces su dirección real es opuesta a la inicialmente asignada. En general, se supone que la corriente fluye desde el lado positivo (más largo) de una batería hacia el lado negativo (más corto); en tal caso el voltaje es positivo; en caso contrario, el voltaje es negativo.

15. Calcula las corrientes que circulan por las ramas del siguiente circuito.

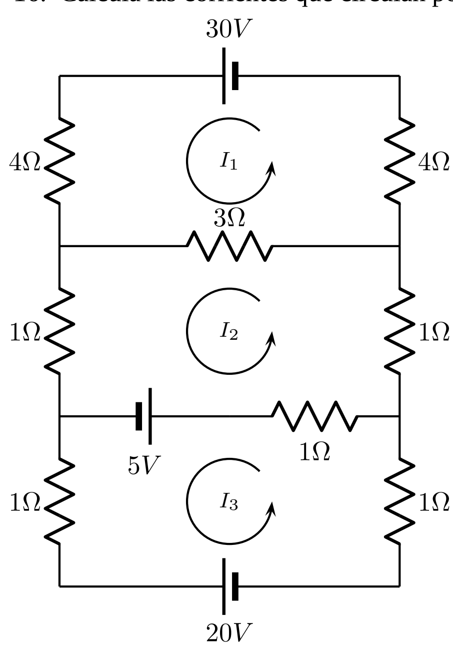


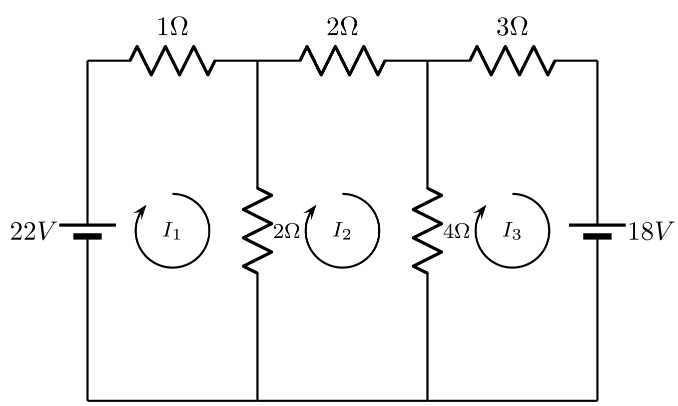
Solución. Las ecuaciones que corresponden a este circuito son:

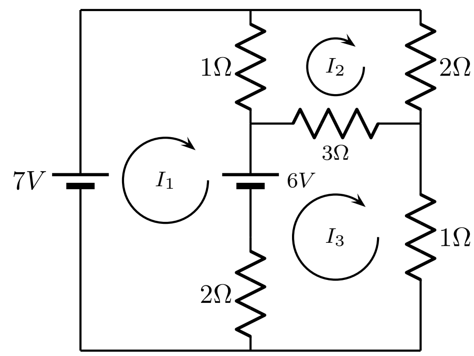
$$\big(-8+8I_1+2I_3, 4I_2-2I_3, I_1-I_2-I_3\big)=\big(0,0,0\big)$$

Cuyas solución es $(I_1, I_2, I_3) = (6/7, 2/7, 4/7)$.

16. Calcula las corrientes que circulan por las ramas de los siguientes circuitos.







Solución. Las ecuaciones que corresponden a estos circuitos son, respectivamente, las siguientes:

$$\big(-30 + 11I_1 - 3I_2, -5 + 6I_2 - 3I_1 - I_3, 25 + 3I_3 - I_2 \big) = \big(0, 0, 0\big)$$

Cuya solución es $(I_1, I_2, I_3) = (3, 1, -8)$.

$$\big(-22 + 3I_1 - 2I_2, 8I_2 - 2I_1 - 4I_3, 18 + 7I_3 - 4I_2 \big) = \big(0, 0, 0\big)$$

Cuya solución es $(I_1, I_2, I_3) = (8, 1, -2)$.

$$\big(-1 + 3I_1 - I_2 - 2I_3, 6I_2 - I_1 - 3I_3, -6 + 6I_3 - 3I_2 - 2I_1 \big) = \big(0, 0, 0\big)$$

Cuya solución es $(I_1, I_2, I_3) = (3, 2, 3)$.