Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 7 - Funciones de varias variables

1. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden orden de los campos escalares:
   (a) $f(x,y) = x^2y + z^2x + y\,\mathrm{sen}(xz)$ (b) $z = (x^2 + y^3)\,\mathrm{e}^{-x\,y}$ (c) $w = x\,\mathrm{e}^z + z\,\mathrm{e}^y + xyz$.

2. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden del campo $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{1 + y^2 + z^2}$.

3. Decimos que una función f es **armónica** en un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ en todo punto $(x,y) \in \Omega$. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

   a) $f(x,y) = \mathrm{arc\,tg}(x/y), \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$.

   b) $h(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{x^2 + y^2}, \quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Calcula, para los siguientes campos escalares, el vector normal en P_0 a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

   a) $f(x,y) = \mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right) \qquad P_0 = (1,1)$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)}{2 + \cos(x-y)} \qquad P_0 = (\pi/2, \pi/4)$.

5. Calcula la derivada de $h(x,y) = \dfrac{x - y}{1 + \log(1 + x^2y^2)}$ en el punto $(-1,-1)$ en la dirección dada por el vector ortogonal (de norma 1) en el punto $(1,1)$ a la curva de nivel del campo $f(x,y) = x\,y^3 + x^3y$ que pasa por dicho punto.

6. Calcula las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto P_o indicado.

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0, \ P_0(1,-1,4); \qquad z - \log(x^2 + y^2) = 0, \ P_0(1,0,0)$$
$$4 - x^2 - 4z^2 = y, \ P_0(0,0,1); \qquad x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 4y + 3z + 1 = 0, \ P_0(3,4,-3)$$
$$z(xy-1) - (x+y) = 0, \ P_0(1,2,3); \qquad z + \mathrm{e}^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0, \ P_0(1, 1+\sqrt{\mathrm{e}}, 1)$$

7. Halla la ecuación de la tangente a la curva intersección del hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 11$ y del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 27$ en el punto $(3,-2,1)$.

8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $z = x\,y,\ x^2 + y^2 - 2z = 4$ en el punto $(3,1,3)$. Comprueba el resultado expresando la curva por sus ecuaciones paramétricas.

9. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $4xz = (x+z)y,\ 3z^2 + y = 5x$ en el punto $(1,2,1)$.

10. Clasifica los puntos críticos de las funciones:

$$f(x,y) = 2xy - 2x^3y - xy^2 + x^3y^2; \qquad f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 - 3y^2;$$
$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y; \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16;$$
$$f(x,y) = -xy + 2x^3y - xy^2 - 2x^3y^2; \qquad f(x,y) = \cos(x)\cos(y);$$
$$f(x,y) = 2x + y + x^2 + xy + y^3; \qquad f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2;$$
$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2; \qquad f(x,y) = xy(1 - x - y);$$
$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 3x - 3y - 3z; \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz - x - y - z;$$

11. Calcula un plano que pase por el punto $(1,2,3)$ y que forme con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo (el volumen de un tetraedro es un tercio del área de la base por la altura).

12. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ en el rectángulo $A = [0,3] \times [0,2]$.

13. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y^3(1 - x - y)$ en el recinto
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leqslant 1\right\}$$

14. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$ en el conjunto
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4 \ \wedge \ y \geqslant 0\right\}$$

15. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y^3 + x^2 + 6y^2$ en la bola cerrada $\overline{B}((0,0),\sqrt{5})$.

16. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y,z) = x^2 + yz$ en la bola euclídea unidad cerrada.

17. a) Clasifica los extremos relativos del campo escalar $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$.

    b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2,\ y \geqslant 0\right\}.$$

18. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1$$

    a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f en la bola abierta $B((0,0),2)$.

    b) Calcula los extremos absolutos de f en la bola cerrada $\overline{B}((0,0),2)$.

19. Calcula los puntos del conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2x,\ y \geqslant 0\right\}$ donde el campo escalar $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

20. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2y + y^2$ en $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

21. Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ en
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4, y \leqslant 1\right\}$$

22. Clasifica los puntos críticos del campo escalar $f(x,y) = y^3 + 2x^2 + y^2 - 4x - 8$ y calcula sus extremos absolutos en la elipse $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leqslant 3\right\}$.