Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 2 - Algunas aplicaciones del cálculo matricial

1. Sea

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Expresa, en cada caso, $\mathbf{M}_i$ en la forma $\mathbf{M}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal y calcula $\mathbf{M}_i^5$.

2. Considera la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Estudia si es diagonalizable y calcula de dos formas distintas $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5^n}\mathbf{M}^n$.

3. Considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

   Estudia si es diagonalizable y calcula el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}M^n$.

4. Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. En cada etapa el 50 % de jóvenes llegan a adultos. El número medio de crías de las hembras jóvenes es de 1,5 y el de las adultas es de 2. Si inicialmente hay 100 hembras de cada grupo, ¿cuántas hembras habrá al cabo de tres etapas? Estudia el comportamiento de la población a largo plazo.

5. Una población se divide en dos grupos: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y cada adulto produce de media 3 jóvenes en cada periodo de tiempo. Supongamos asimismo que, de una etapa de tiempo a la siguiente, el 50 % de los jóvenes y de los adultos sobreviven.

   Escribe la ecuación matricial que representa la dinámica de esta población. Si inicialmente hay 2 jóvenes y 4 adultos, ¿cuál será la población al cabo de 4 etapas? Estudia la evolución a largo plazo.

6. La dinámica de una población viene dada por $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}(n)$ donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

   Calcula $\mathbf{M}^3$ y estudia la evolución de dicha población.

7. En una colonia de focas, cuyas hembras se han clasificado en 3 grupos de edad, G_1, G_2 y G_3, se han observado las siguientes tasas de supervivencia: un 60 % para las hembras de G_1, un 85 % para las de G_2 y todas las de G_3 mueren. Las hembras de G_2 tienen una tasa de fecundidad del 80 %, mientras que las de G_3 tienen una tasa del 50 %.

   a) Escribe la matriz de Leslie asociada a esta población.

   b) Partiendo de una población inicial dada por $X(0) = (100, 60, 50)^t$, calcula el número de focas que habrá en G_3 tras 2 períodos de observación.

   c) En una visita a la colonia se recuentan $(85, 85, 60)$. ¿Qué distribución por edades se puede suponer que hubo en el período anterior?

8. Una población (de hembras) está dividida en dos grupos de edad, G_1 y G_2. La matriz de Leslie es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

   b) Calcula el autovalor dominante y un autovector asociado.

   c) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

9. Una población (de hembras) está dividida en tres grupos de edad, G_1, G_2 y G_3. La matriz de Leslie es
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

   b) ¿Es posible diagonalizar la matriz $\mathbf{M}$?

   c) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

10. Una población (de hembras) está dividida en tres grupos de edad, G_1, G_2 y G_3. La matriz de Leslie es
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 8 & 10 \\ \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Interpreta biológicamente cada elemento de la matriz de Leslie.

   b) Expresa la matriz $\mathbf{M}$ en la forma $\mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal.

   c) Discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad.

11. Una población de hembras está dividida por edades en cinco grupos G_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$ y su evolución sigue un modelo de Leslie, $X(n+1) = LX(n)$, con tasas de fertilidad respectivas $f_1 = 0$, $f_2 = f_3 = 1$, $f_4 = 3/2$, f_5=2 y tasas de supervivencia $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/3$, $s_3 = 2/3$, $s_4 = 3/4$. Escribe la matriz de Leslie, discute el comportamiento en el futuro de la población y calcula las proporciones a largo plazo de los grupos de edad. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} L^n$.

12. Sea $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}^n$.

13. Un territorio está dividido en tres zonas E_1, E_2 y E_3 en las que habita una población de aves. Cada año se producen los siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:

    De los que están en E_1 un 10 % emigra a E_2 y un 30 % emigra a E_3.

    De los que están en E_2 un 10 % emigra a E_1, un y un 10 % emigra a E_3.

    De los que están en E_3 un 10 % emigra a E_1 y un 20 % emigra a E_2.

    Supongamos que inicialmente de la población total de aves un 30 % vive en E_1, un 20 % vive en E_2 y un 50 % viven en E_3. ¿Cuál ser´a la distribución de la población de aves a los 2 años? ¿Y a los n años? A largo plazo ¿cuál será la probabilidad de que un ave esté en cada zona? ¿Depende esta probabilidad final de la distribución inicial de las aves?.

14. En una ciudad existen dos partidos políticos, uno conservador y otro liberal. Los alcaldes son elegidos por un período de un año y se ha observado que la probabilidad de que a un alcalde conservador suceda otro conservador es 3/5 y que a un alcalde liberal siga otro liberal es 1/2. Supongamos que en 2005 hay alcalde liberal. ¿Cuál será la probabilidad de que en 2008 el alcalde sea liberal?

15. Un hombre conduce su coche o toma el tren para ir a trabajar cada día. Supongamos que nunca toma el tren dos días seguidos; pero si conduce para ir a trabajar, entonces al día siguiente es tan probable que conduzca de nuevo como que tome el tren.

    a) Escribe la matriz de transición del proceso.

    b) Calcula la probabilidad de que vaya en coche, cuatro días después de haber ido en tren.

16. Consideremos un edificio con tres pisos con ascensor. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del primer piso se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el segundo piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el tercero. Por último, si un trayecto comienza en el tercer piso, siempre termina en el primero.

    a) Calcula la matriz de transición de la cadena y representa su gráfico asociado. ¿Es regular?

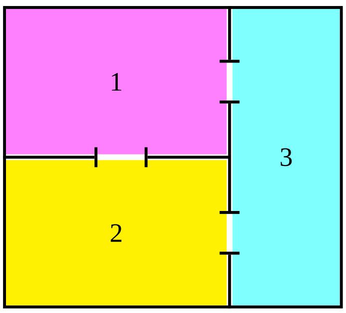
    b) ¿Dónde es más probable que esté el ascensor después de cuatro viajes, si salió del primer piso?

17. Una familia planifica cada año sus vacaciones de la siguiente manera. Si un año va a la montaña al año siguiente va al mar y al segundo año descansa en la casa. Pero al año siguiente es igualmente probable que se traslade al mar o a la montaña. En 2005 quedarán en casa. ¿Dónde es más probable que pasen sus vacaciones en el año 2010? ¿Cuál es la probabilidad a largo plazo de que vayan a la montaña?

18. Un supermercado realiza la experiencia siguiente en relación con las preferencias de sus clientes. Se observa que: El 80 % de las personas que compran un día el producto A repite al día siguiente. El 60 % de los que no compran el producto A un día, lo compran al día siguiente. Si el 50 % compró el producto un día determinado, ¿qué podemos predecir para la compra del producto el segundo día? ¿Y para el tercero?

19. Supongamos que disponemos de una casa, un granero, un gato y un ratón. Los animales pueden estar los dos en la casa, los dos en el granero o uno en el granero y otro en la casa. Realizamos de forma sucesiva la siguiente experiencia. Lanzamos dos monedas al aire, si salen dos caras cambiamos al ratón del lugar donde se encuentre. Si salen una cara y una cruz, es el gato el que se cambia. Por último, si salen dos cruces, entonces cambiamos al gato y al ratón del sitio donde se encuentran. Describe este proceso mediante una cadena de Markov y calcula la distribución límite de estado estacionario. Interpreta los resultados obtenidos.

20. Supongamos que en un laboratorio se coloca un conjunto de ratones en una caja dividida en tres compartimentos comunicados y todos con la misma facilidad de acceso, tal y como se indica en la figura de la derecha. Los compartimentos permanecen cerrados y se abren cada lunes. Cada semana todos los ratones cambian de compartimento y eligen al azar otro. Sea $X(n) = (x(n), y(n), z(n))^t$ donde $x(n), y(n), z(n)$, son, respectivamente, el número de ratones que hay en los compartimentos 1, 2 y 3. Supongamos que $X(0) = (10, 15, 20)$.

    1) Expresa la dinámica de este proceso en la forma $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}(n)$ donde $\mathbf{M}$ es una matriz que debes calcular.

    2) Diagonaliza la matriz $\mathbf{M}$.

    3) Calcula la distribución de los ratones al cabo de n semanas.

    4) Estudia cómo será a largo plazo la distribución de los ratones.

21. Un cultivo de plantas que, según su genotipo, pueden dar flores azules (AA), verdes (Aa) o amarillos (aa), se somete a un proceso de polinización en el cual las plantas de flores azules se fecundan con polen de plantas de flores amarillas, las de flores verdes con polen de ellas mismas y las de flores amarillas con polen de plantas de flores azules. Estudia la distribución de los genotipos en las sucesivas generaciones y su evolución a largo plazo.

22. La expresión de un cierto carácter en una población animal depende de dos alelos de un gen autosómico A y a. Iniciamos un proceso de cruce con una pareja de genotipos AA y Aa. Supuesto que esta pareja tiene un descendiente solamente, lo volvemos a cruzar con otro de genotipo Aa y este proceso se repite: cada pareja tiene un descendiente que lo cruzamos con otro de genotipo Aa. Formula este proceso como una cadena de Markov y calcula las probabilidades a largo plazo de obtener cada uno de los genotipos AA, Aa y aa.