Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 6 – Ecuaciones diferenciales y dinámica de poblaciones

1. Admitamos que la ED $y' = xy^3$, tiene una única solución,φ, definida en el intervalo $]-1,1[$ que verifica la condición inicial $\varphi(0) = 1$. Justifica, *sin calcular dicha solución*, que:

   a) φ es una función par, esto es, $\varphi(x) = \varphi(-x)$ para todo $x \in]-1,1[$.

   b) φ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

2. Haz un estudio cualitativo de las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas.

   $$a)\ y' = (1-y)(3-y), \quad b)\ y' = -(y-10)^2(y-4), \quad c)\ y' = (y^3-8)(e^y-1), \quad d)\ y' = y - y^3$$

3. Haz un estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación logística modificada

   $$x'(t) = rx(t)\left(\frac{x(t)}{K_0} - 1\right)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{1}$$

   Donde K es la capacidad de alojamiento del medio, y K_0 es una constante que representa un valor mínimo por debajo del cual la población se extingue.

4. La evolución de la población de peces de un lago sometida a pesca está modelada por la siguiente ecuación diferencial

   $$P'(t) = 0{,}2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\alpha}\right) - \beta P(t)$$

   Donde $P(t)$ es el número de peces medido en miles, $\alpha \geqslant 2$ es un parámetro biológico y $\beta > 0$ es un parámetro que indica la intensidad de la pesca. Inicialmente hay 2000 peces ($P(0) = 2$).

   Estudia los puntos de equilibrio. ¿Qué pasa si $\beta \geqslant 0{,}2$? Haz un estudio cualitativo de las soluciones de esta ecuación diferencial. Considera los casos particulares $\alpha = 5$, $\beta = 0{,}1$ y $\alpha = 7$ y $\beta = 0{,}15$.

5. La evolución de una cierta población viene descrita por la siguiente ecuación diferencial

   $$P'(t) = \alpha P(t)\big(12 - 4P(t)\big)$$

   donde $\alpha > 0$ es un parámetro biológico del modelo. Haz un estudio cualitativo de las soluciones de dicha ecuación diferencial. ¿Hay alguna solución que verifique $P(0) = 2$ y $P(1) = 4$?

6. Haz un estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = y - 2y^2$. Calcula su solución general y comprueba los resultados obtenidos.

7. Haz un estudio cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial $y' = 2y - y^3$. Calcula su solución general y comprueba los resultados obtenidos.

8. En 1980 se arrojaron 500 truchas a un lago en el que no había ninguna. Cinco años más tarde se calculó que el número de truchas en el lago era de 1500. Se supone que la tasa de crecimiento de la población es constante y proporcional al número de truchas existente. Calcula la cantidad de truchas en el año 1990.

9. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad N_0 de bacterias. Pasada una hora, el número de bacterias medido es $(3/2)N_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias presentes, determina el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

10. Sabiendo que el número de bacterias de un cultivo se duplica en 4 horas, y que la tasa de crecimiento de la población es constante y proporcional al número de bacterias existente, calcula en cuánto tiempo la población se hará 25 veces mayor.

11. En el año 1985 la población mundial era aproximadamente de 4830 millones de personas y mantenía un crecimiento de 1.73% anual. Usa el modelo maltusiano para estimar el valor de la población mundial en el año 2017.

12. El isótopo del bario Ba-133 tiene una vida media (tiempo que tarda en reducirse a la mitad una masa de materia radiactiva) de 10.53 años. Determina la ecuación diferencial que modela la evolución en el tiempo de la cantidad de Ba-133 y calcula la constante de decaimiento radiactivo del mismo. Calcula el tiempo que tarda un kilogramo de Ba-133 en reducirse a un gramo.

13. El número de bacterias, medido en miles, que hay en un cultivo en el instante t (medido en días) viene dado por la ecuación logística

$$P'(t) = \lambda P(t)(2 - P(t)),$$

donde $\lambda > 0$. Inicialmente hay 1000 bacterias. Haz un estudio cualitativo de las soluciones y deduce el comportamiento de la población a largo plazo. Calcula analíticamente la solución y determina el número de bacterias que habrá al cabo de dos días y el tiempo necesario para que haya 1500 bacterias.

14. Se considera una población de 100 individuos que evoluciona según un modelo logístico modificado por el hecho de que su tamaño se reduce en 10 individuos por unidad de tiempo. Si $y(t)$ es el número de individuos en el tiempo t la dinámica de la población viene dada por la ED

$$y' = y\left(1 - \frac{y}{40}\right) - 10$$

Calcula analíticamente la función $y(t)$. ¿Se extinguirá la población?

15. A las 6 de la tarde se encuentra en su despacho, que está a 20ºC, el cuerpo sin vida del profesor de matemáticas con claros síntomas de haber sido víctima de un asesinato. En dicho momento la temperatura corporal del cadáver era de 35ºC. Una hora más tarde su temperatura es de 34ºC. ¿A qué hora se produjo el asesinato?

16. Un depósito contiene inicialmente 1000 litros de agua en la que se han disuelto 10 kilos de sal. Otra solución salina que contiene 25 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 10 litros por minuto, y la mezcla (que se supone uniforme de forma instantánea) sale del depósito a la misma velocidad. Calcular la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

17. Un estanque para regadío de 3000 metros cúbicos está contaminado con DDT en una proporción de 2 gramos por metro cúbico. Para purificar el estanque se introduce agua limpia a razón de 42 metros cúbicos por hora. Simultáneamente, el agua del estanque, que se supone mezclada de forma instantánea, se vacía a la misma velocidad. Calcula la cantidad de DDT que hay en cada instante en el estanque. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la concentración de DDT descienda hasta 0,5g/m^3?

18. Sabiendo que la semivida (tiempo que tarda en reducirse a la mitad una masa de materia radiactiva) del Carbono 14 radioactivo (C-14) es aproximadamente de 5600 años, determina la edad de un fósil que contiene $1/1000$ de la cantidad original de C-14.

19. Considera una población $P = P(t)$ con tasas relativas constantes de nacimiento y de mortalidad α y β, respectivamente, y una tasa constante m de emigración.

    a) Formula una ED que modela la razón de cambio de la población.

    b) La población española en 1950 era, aproximadamente, de 30 millones y la diferencia entre las tasas relativas de nacimiento y mortalidad era del 2.6%. Debido a la falta de trabajo, entre 1950 y 1960 unos 220000 habitantes emigraron cada año. En esos años, ¿estaba la población española aumentando o disminuyendo?

20. Considera la ED
$$P'(t) = \frac{8}{100}P(t)\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$
como un modelo para una población de peces, en donde t se mide en semanas, $P(t)$ es el número de peces y c es el número de peces que se pescan por semana. ¿Cuál la cantidad máxima de capturas que pueden hacerse semanalmente para que la pesca no se agote?

21. Un depósito contiene inicialmente 20kg de sal disueltos en 5000 litros de agua. Al depósito entra salmuera con 0,03 Kg de sal por litro de agua a razón de 25 li/min y la disolución bien mezclada se drena del depósito con igual rapidez. ¿Cuánta sal hay después de 30 minutos? ¿Cuánta después de un tiempo suficientemente largo?

22. En una galería aislada de una mina con un volumen de 1000 metros cúbicos, se ha detectado una concentración de monóxido de carbono de $200\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. La galería se cierra y se filtra su aire a razón de 10 metros cúbicos por segundo que regresa continuamente a la galería con una concentración de monóxido de carbono de $25\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$. Se supone que el aire se mezcla uniformemente en todo momento. Calcula el tiempo necesario para que el aire en la galería tenga una concentración de monóxido de carbono igual a $50\,\mathrm{mg}/\mathrm{m}^3$.

23. Un país va a cambiar de moneda. Para ello los bancos reemplazan, conforme les llegan, los billetes viejos por los nuevos. Sea A el total de dinero en circulación y B la cantidad que diariamente entra en los bancos. Se supone que estas cantidades son constantes. Notemos $x(t)$ la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.

    a) Escribe una ED que represente el "flujo" de la nueva moneda en circulación.

    b)¿Cuánto tiempo pasará para que los nuevos billetes representen el 90% de los circulantes?

24. En un modelo de propagación de epidemias se supone que la rapidez con que se propaga es directamente proporcional al número de individuos contagiados multiplicado por el número de individuos no contagiados. Calcula la solución general de la correspondiente ecuación diferencial. Aplica el resultado obtenido a los siguientes casos.

    a) En una población de 10000 personas se detecta una enfermedad que afecta inicialmente a 50 de ellas. Al cabo de tres días, se observa que son 250 las personas infectadas. Calcula el número de enfermos que habrá pasados 12 días.

    b) En una granja de 40000 pollos hay uno con la gripe aviar. La constante de proporcionalidad para esta epidemia, midiendo el tiempo en días, es $k = 4/10^5$. Determina en cuánto tiempo un 75% de los pollos de la granja quedarán infectados.

25. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un Campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Se supone que la rapidez de propagación del virus es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también al número de alumnos no contagiados. Calcula el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si se ha observado que después de 4 días dicho número es de 50.

26. Consideremos una reacción química en la que dos reactivos A y B, con concentraciones iniciales respectivas a y b moles por litro, reaccionan para formar con cada molécula de cada uno de ellos una molécula de una sustancia C. Sea $x(t)$ la concentración (en moles por litro) de la sustancia C en el tiempo t. La ley de acción de masas afirma que, en estas condiciones, la velocidad de reacción, es decir, la variación de $x(t)$ por unidad de tiempo, es proporcional en todo momento al producto de las concentraciones de las sustancias A y B. Escribe una ED que debe verificar $x(t)$ y calcula sus soluciones suponiendo que $a \neq b$ y que $x(0) = 0$.