Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 4 - Derivadas

1. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los valores que se indican en la tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	3	2	5	-5
1	1	0	-2	1
2	2	3	2	1
3	0	1	4	-6

   Calcula una tabla análoga para las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

2. Calcula todos los valores que toma la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

3. Prueba que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc\,tg} x$. ¿Qué pasa si $x < 0$?

4. Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ en el punto $(c, f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.

5. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u, v) de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$.

6. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u, v) de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u, v) de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

8. Calcula los puntos de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ en los que la tangente a dicha elipse pasa por el punto $(4, 3)$.

9. Calcula los puntos de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ en los que la tangente a dicha hipérbola pasa por el punto $(5, 7)$.

10. Calcula los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en los que la tangente a dicha circunferencia pasa por el punto $(5, 5)$.

11. Calcula dos puntos de la curva $y = 1 - x^2$ tales que las tangentes a la curva en dichos puntos formen con el eje de abscisas un triángulo equilátero.

12. Sea f una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

    - f es positiva en $]-\infty, 1[$ y negativa en $]1, +\infty[$.
    - f' es positiva en $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ y negativa en $]-2, 3[$.
    - f'' es positiva en $]-\infty, -3[\cup]0, 4[$ y negativa en $]-3, 0[\cup]4, +\infty[$.
    - $f(-2) = 4$, $f(3) = -2$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 2$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -1$.

    Se pide de forma razonada:

    a) Calcula el valor de $f(1)$.

    b) Determina si hay extremos relativos y puntos de inflexión y dónde se encuentran.

    c) Realiza un esbozo de la gráfica de f.

13. Sea f una función dos veces derivable en $]-\infty, 5[$ con las siguientes propiedades:

   - f es positiva en $]-\infty, 1[\cup]4, 5[$ y negativa en $]1, 4[$.
   - f' es positiva en $]-\infty, -2[\cup]3, 5[$ y negativa en $]-2, 3[$.
   - f'' es positiva en $]-\infty, -3[\cup]0, 5[$ y negativa en $]-3, 0[$.
   - $f(-2) = 4$, $f(3) = -2$, $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 2$, $\lim\limits_{t\to 5} f(t) = +\infty$.

   Se pide de forma razonada:

   a) Calcula el valor de $f(1)$ y $f(4)$.

   b) Determina si hay extremos relativos y puntos de inflexión y dónde se encuentran.

   c) Realiza un esbozo de la gráfica de f.

14. Sea f una función dos veces derivable en $]-5, 5[$ con las siguientes propiedades:

   - f es positiva en $]4, 5[$ y negativa en $]-5, 4[$.
   - f' es positiva en $]-5, -3[\cup]-1, 5[$ y negativa en $]-3, -1[$.
   - f'' es positiva en $]-2, 1[\cup]3, 5[$ y negativa en $]-5, -2[$.
   - $f(-3) = -1$, $f(-1) = -3$, $\lim\limits_{t\to-5} f(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to 5} f(t) = +\infty$.

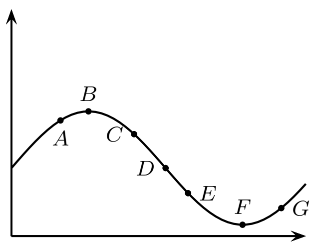
   Se pide de forma razonada:

   a) Calcula el valor de $f(4)$.

   b) Determina si hay extremos relativos y puntos de inflexión y dónde se encuentran.

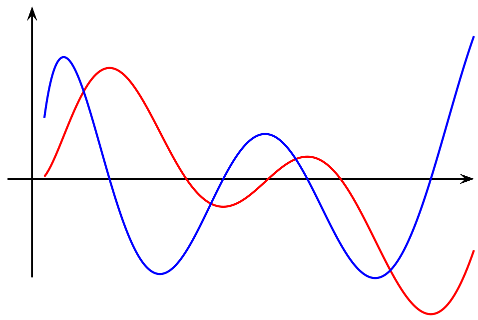
   c) Realiza un esbozo de la gráfica de f.

15. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función f dos veces derivable. Estudia el signo de la primera y la segunda derivada de f en cada uno de los puntos indicados.
   Si suponemos que un móvil se mueve a lo largo de una línea recta y que la gráfica muestra su distancia al origen en el tiempo t. Indica, a la vista de la gráfica y de forma aproximada:

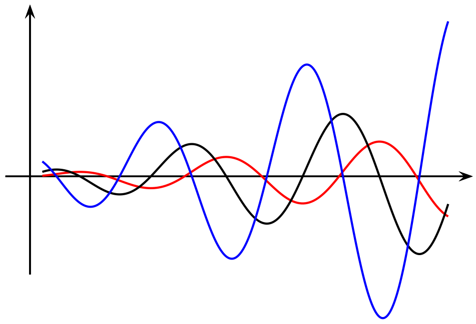
   

   a) Cuándo se está alejando o acercando al origen.
   b) Cuándo está acelerando y cuándo está frenando.

16. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de su derivada. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre ambas gráficas.

17. La figura de la derecha muestra la gráfica de una función y de sus dos primeras derivadas. Debes identificar cada una de ellas y explicar las relaciones entre dichas gráficas.



18. Traza la gráfica de una función f dos veces derivable en $\mathbb{R}$, sabiendo que:

    a) La gráfica de f pasa por los puntos $(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$.

    b) f' es positiva en los intervalos $]-\infty, -2[$ y $]0, 2[$, y es negativa en $]-2, 0[$ y $]2, +\infty[$.

    c) f'' es negativa en los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$, y es positiva en el intervalo $]-1, 1[$.

19. Una función polinómica, f, tiene un mínimo relativo en $x = 1$ siendo $f(1) = -1$, un máximo relativo en $x = 2$ siendo $f(2) = 4$, un mínimo relativo en $x = 5$ siendo $f(5) = -3$ y no tiene más puntos críticos. ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $f(x) = 0$?

20. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por
$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$
Estudia la continuidad de f y los límites en 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

21. Determina el número de raíces reales de las ecuaciones
$$6x^4 - 7x + 2 = 0, \quad 6x^5 + 13x + 1 = 0, \quad x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0.$$

22. Determina para qué valores de α la función polinómica
$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - \alpha$$
tiene cuatro raíces reales distintas.

23. Determina el número de soluciones reales de la ecuación $2x^3 - 3x^2 - 12x = m$ según el valor de m.

24. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$
    a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos absolutos y la imagen.

    b) Estudia el número de soluciones que tiene la ecuación $f(x) = \alpha$ según los valores del número real α.

26. Se necesita encargar la fabricación de unas cajas de cartón para transportar plantas que deben tener la forma de un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero. Sabiendo que el volumen de cada caja debe ser de 6 litros, se pide calcular las dimensiones de las cajas para minimizar la cantidad de cartón necesario para la fabricación, esto es, minimizar el área total de la superficie de la caja, incluyendo las dos tapas.

27. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, calcula la longitud del segmento con extremos en los ejes coordenados que pasa por P y tiene longitud mínima.

28. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que tenga área máxima.

29. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

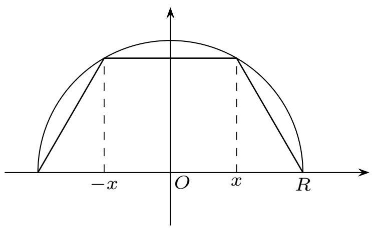
30. Con una lámina metálica rectangular de $12 \times 18\text{cm}^2$ se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse.

31. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables en el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

32. Se quiere imprimir un cartel cuya área total debe ser 6000cm^2 con márgenes de impresión laterales de 6cm y márgenes arriba y abajo de 10cm. Calcula las dimensiones que maximizan el área de impresión.

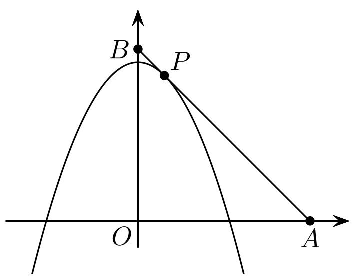
33. En un cono circular recto de radio en la base r y altura h, el volumen viene dado $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ y el área de su superficie por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Calcula las dimensiones del cono que teniendo área superficial igual a 1 tiene volumen máximo.

34. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área maxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R. Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.



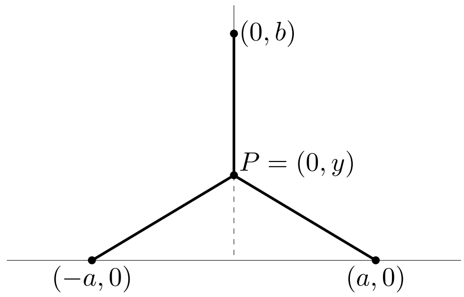
35. Se quiere construir un depósito para gas de forma cilíndrica rematado en sus extremos por dos semiesferas cuyo volumen sea igual a 10π metros cúbicos. El coste por metro cuadrado de las semiesferas es doble al de la parte cilíndrica. Calcular las dimensiones del depósito para que el coste sea mínimo. Justifica que se trata de un mínimo absoluto.

36. Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.

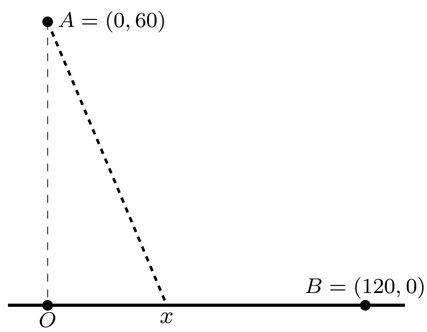


37. Se desea construir un canalón para la lluvia a partir de una lámina metálica que tiene 30cm de ancho, doblando la tercera parte de la lámina de cada lado hasta que forme un ángulo α. ¿Cómo debe elegirse α para que el canalón lleve la cantidad máxima de agua? Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.

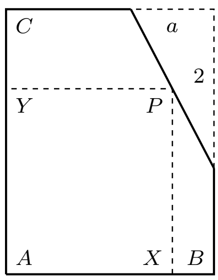
38. Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



39. Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas son $A = (0, 60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B = (120, 0)$. Por el origen $O = (0, 0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



40. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



41. Un futbolista avanza con el balón hacia la portería contraria por el borde del campo. ¿A qué distancia, x, de la línea de meta debe tirar a puerta para que el ángulo de tiro, α, sea máximo?