Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 5 - Integrales

1. Calcula, usando la técnica de integración por partes, las integrales:

$$\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x\,, \quad \int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x\,, \qquad \int \operatorname{arc\,sen} x\,\mathrm{d}x\,, \int_1^4 \sqrt{t}\ln t\,\mathrm{d}t\,, \quad \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^3 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x\,, \int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x\,, \int_0^{\pi/4} \frac{\vartheta}{\cos^2\vartheta} d\vartheta, \quad \int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\,, \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

2. Calcula las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad \cos x = t; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \quad \operatorname{tg} x = t; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} \quad \mathrm{e}^x = t$$

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}} \quad x = 2\operatorname{tg} t; \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

3. Calcula las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado y expresa la primitiva obtenida como una función de la variable x.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad x = a\operatorname{sen} t; \quad \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x \quad x = a\cosh t; \quad \int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \quad x = a\operatorname{senh} t$$

4. Calcula las integrales:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}, \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}, \int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\,, \int \frac{\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

5. Calcula las siguientes integrales

$$\int \frac{2x^2+5x-7}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x\,; \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x \quad \int_2^{+\infty} \frac{x+3}{x(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\,; \int_0^{+\infty} \frac{3+2x}{x^3+2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$

6. Calcula las integrales:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x + 2\operatorname{sen} x + 3}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}, \quad \int \frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$$

7. Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

8. Calcula el área de una elipse de semiejes a y b.

9. Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$$

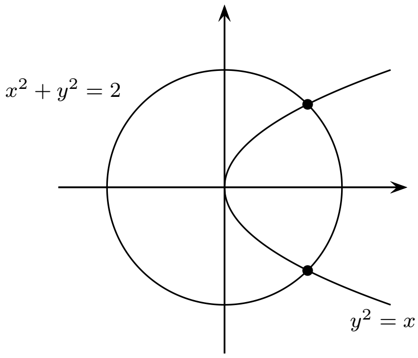
Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función f y el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 1/3)$.

10. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje de ordenadas la región del plano limitada por la curva de ecuación $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$.

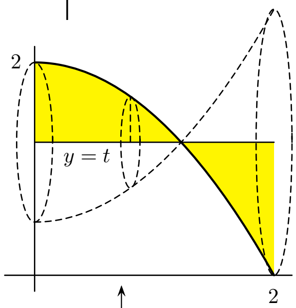
11. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$ alrededor de la recta $x = 4$.

12. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región del plano limitada por la parábola $y^2 - x - 3 = 0$ y la recta $2y - x = 0$ alrededor del la recta $y = 4$.

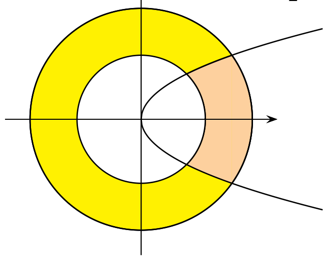
13. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 2$.



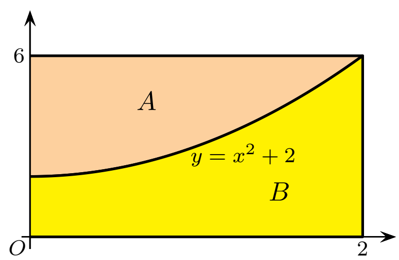
14. La parte de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ donde $0 \leqslant x \leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y = t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2$. Calcula el volumen del sólido resultante (que será una función de t). Calcula el valor de t que hace mínimo el volumen de dicho solido.



15. Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.



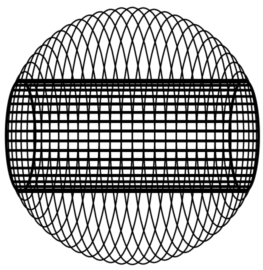
16. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar las regiones A y B de la figura alrededor de cada una de las rectas: $x = 0$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$, $y = -2$, $y = 6$.

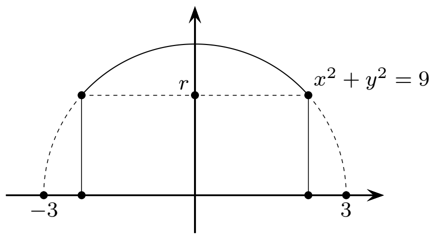


17. a) Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las láminas o capas, el volumen de una esfera de radio 3 en la que, siguiendo un diámetro, se ha perforado un agujero cilíndrico de radio $r < 3$.

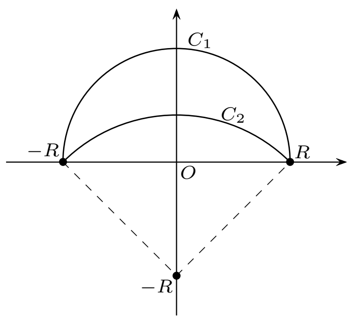
    b) Calcula el área de la superficie total del solido obtenido.

    c) Calcula los valores de r para los que dicha área alcanza sus valores extremos.

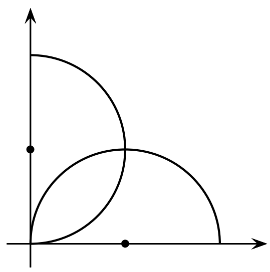




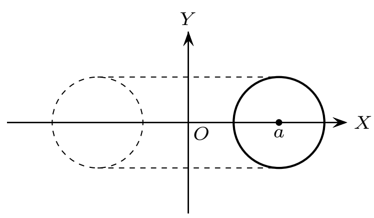
18. Calcula el área de la luna formada por la intersección de la parte superior de los círculos C_1 de centro el origen y radio R y C_2 de centro $(0, -R)$ y radio $\sqrt{2}R$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



19. Calcula el área de la intersección de los círculos centrados en $(0, 1)$ y $(1, 0)$ y de radio 1. Calcula, por el método de los discos o arandelas y por el método de las tubos o de las capas, el volumen del sólido engendrado al girar dicha región alrededor del eje de abscisas.



20. El círculo limitado por la circunferencia de ecuación
$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$
donde $a > 1$, gira alrededor del eje OY. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido:
a) Por el método de los discos o arandelas.
b) Por el métodos de las capas o tubos.



21. Sea R la región interior a la circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 2 que queda por encima de la recta $y = \sqrt{3} - 1$.

    a) Calcula el área de R.

    b) Calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar R alrededor del eje de ordenadas.

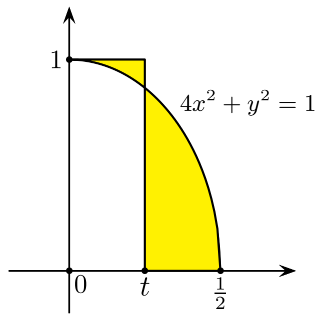
22. Sea R la región del plano limitada por las curvas

$$x^2 + (y-1)^2 = 5, \quad (y-1)^2 = \frac{x}{2}$$

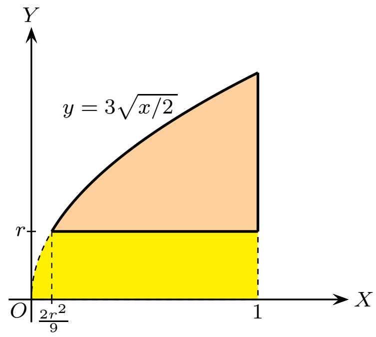
a) Calcula el área de R.

b) Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando R alrededor del eje de ordenadas y alrededor de la recta $y = 1$.

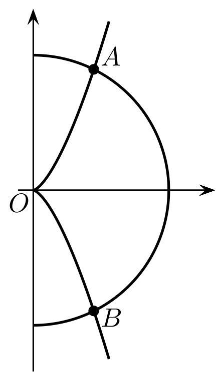
23. Sea $A(t)$ el área de la región del plano (en amarillo en la figura) comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Se pide calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, 1/2]$.



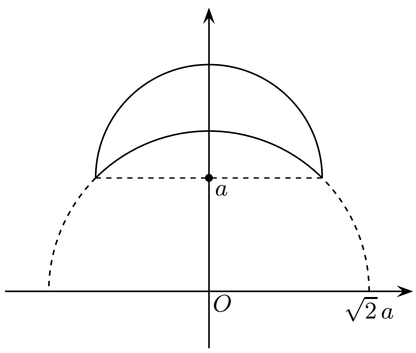
24. La región del plano comprendida entre la curva $y = 3\sqrt{x/2}$, las rectas $y = 0$ y $x = 1$, se gira alrededor del eje de abscisas, y en el sólido así obtenido se perfora un orificio circular de radio $0 < r < 3/\sqrt{2}$ centrado en el eje de revolución. Calcular r para que la superficie total del sólido resultante (cilindro interior más superficie exterior) sea máxima.



25. Calcula la longitud de la curva cerrada $OABO$ de la figura donde A y B son los puntos donde se cortan las curvas $y^2 = 2x^3$, $x^2 + y^2 = 20$ y O es el origen de coordenadas.



26. Sea $a > 0$. Calcula usando técnicas de integración el área de la luna formada por la parte del círculo $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ que es exterior al círculo $x^2 + y^2 = 2a^2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



27. Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4+48}{24x}$ en $[2,4]$

28. Calcula la longitud de la curva $y = \ln(1-x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

29. Calcula la longitud de la catenaria $y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ para $x \in [-1,1]$.

30. Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que:

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

31. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$a)\ G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ $\qquad b)\ G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$

$c)\ G(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$ $\qquad d)\ G(x) = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}(\ln t)\,\mathrm{d}t$

$e)\ G(x) = \displaystyle\int_0^{x}\left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$ $\qquad f)\ G(x) = \displaystyle\int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$

32. Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

33. Estudia, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de las integrales:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

34. Dado $t > 1$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-2x+2)}} \qquad (1 \leqslant x \leqslant t)$$

Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

35. a) Calcula para $t > 0$ la integral:

$$V(t) = \int_0^t \frac{3+2x}{x^3+2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Calcula el límite $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.