Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 10 – Integrales múltiples

1. Calcula la integral de la función $f : A \to \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),\ (1,1),\ (0,1)$.

   b) $f(x,y) = x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

   c) $f(x,y) = e^{x/y}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x,\ x = 0,\ y = 1$.

   d) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2},\ y = x$.

   e) $f(x,y) = xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, y el eje OX.

   f) $f(x,y) = e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x,\ x = 2$ y el eje x.

2. Calcula los siguientes volúmenes:

   a) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = x+y$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(0,0),\ (0,1),\ (1,0)$

   b) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = 2x+1$ e inferiormente por el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+(y-1)^2 \leqslant 1\}$

   c) Volumen del sólido comprendido por el paraboloide de ecuación $z = x^2+y^2$ e inferiormente por el disco unidad.

   d) Volumen del sólido limitado superiormente por $z = 4-y^2-\dfrac{x^2}{4}$ e inferiormente por el disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+(y-1)^2 \leqslant 1\}$.

   e) Volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1-x^2-y^2$.

   f) Volumen del conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2x\}$.

   g) Volumen limitado por el paraboloide elíptico $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16} = z$ y el plano $z = 7$.

3. Calcula el volumen de la región $A \subseteq \mathbb{R}^3$ comprendida entre el plano XY y el paraboloide $z = x^2+y^2$ y que queda dentro del cilindro $x^2+y^2-2x = 0$. Es decir:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2,\ \ x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$$

4. Calcula el volumen de la región $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2x,\ \ 0 \leqslant z \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right\}$.

5. Calcula el volumen del conjunto

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9} \leqslant 1,\ x^2+y^2 \geqslant 4\right\}$$

6. Utiliza el cambio a coordenadas polares para calcular las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

   a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},\ \ A = B\big((0,0),1\big)$

   b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ \ A = [0,1]\times[0,1]$

   c) $f(x,y) = y,\ \ A = \{(x,y) \in B\big((1/2,0),1/2\big) :\ \ y \geqslant 0\}$

d) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=B\big((1,0),1\big)$

e) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$

7. Calcula la integral de $f:A\to\mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x,y)=x,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 2x\}$

b) $f(x,y)=x\sqrt{1-x^2-y^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x,y\geqslant 0\}$

c) $f(x,y)=\exp(x/y),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant y^3\leqslant x\leqslant y^2\}$

d) $f(x,y)=\exp\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 2\}$

e) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\leqslant y,\ x+y\geqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$

f) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+y^2)^2\leqslant 4(x^2-y^2),\ x\geqslant 0\}$

g) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 2y,\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$

h) $f(x,y)=\sqrt{xy}$, A dominio acotado por la curva $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)^4=\dfrac{xy}{\sqrt{6}}$ que está en el primer cuadrante.

i) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z)^3},\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y+z\leqslant 1, x,y,z\geqslant 0\}$

j) $f(x,y,z)=(x+y+z)^2,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1, x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\}$

k) $f(x,y,z)=z,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}\leqslant 1, z\geqslant 0\}$

l) $f(x,y,z)=z,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leqslant z^2, 0\leqslant z\leqslant 1\}$

m) $f(x,y,z)=x^2,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geqslant 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1,\ 4z^2\geqslant 3(x^2+y^2)\}$

n) $f(x,y,z)=zy\sqrt{x^2+y^2}\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\}$

ñ) $f(x,y,z)=z,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2,\ x^2+y^2\leqslant z\}$

o) $f(x,y,z)=z^2,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2\mathrm{R}z\}$

p) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 3\}$

q) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}$, A el conjunto acotado por el paraboloide $y=x^2+z^2$ y el plano $y=4$.

8. Calcula el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

b) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}\right\}$

c) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2,\ x+y\leqslant 1,\ x,y\geqslant 0\right\}$

d) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\leqslant 2y\right\}$

e) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leqslant z\leqslant 4-y^2,\ 0\leqslant x\leqslant 6\right\}$

f) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{x},\ 0\leqslant z\leqslant 9-x\right\}$

g) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leqslant z^2,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\right\}$

9. Calcula $\displaystyle\iint_A e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\right\}$.

10. Calcula $\displaystyle\iint_A \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\right\}$.

11. Calcula la integral $\displaystyle\iint\limits_A \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant y, 0\leqslant x\right\}$$

12. Calcula $\displaystyle\iint\limits_A \frac{y^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, 0\leqslant x\leqslant y\right\}$$

13. Calcula la integral $\displaystyle\iint\limits_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1, |y|\leqslant x\right\}$$

14. Calcula la integral $\displaystyle\iint\limits_A (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1, 0\leqslant x, 0\leqslant y\right\}$$

15. Calcula, mediante una integral doble, el área del siguiente recinto plano

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2y, y\leqslant x\right\}$$

16. Calcula $\displaystyle\iint\limits_A \exp\big((x^2+y^2)/2x\big)\,\mathrm{d}(x,y)$ donde

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$$