Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

Relación 1 - Sistemas de ecuaciones lineales

1. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la matriz inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

2. Calcula la forma canónica de Hermite de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve por el método de eliminación de Gauss–Jordan los sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & -8 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 3y & = & 8 \\ 4x - 5y + z & = & 15 \\ 2x \quad\quad + 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

4. Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Indicar condiciones que debe cumplir el vector $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ para que el sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ sea compatible.

5. Para hacer un plaguicida se necesitan 6 litros del compuesto A; 7 litros del compuesto B y 10 litros del compuesto C. El producto comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos compuestos. El producto comercial Y contiene 1,1 y 2 partes, y el producto comercial Z contiene dichos compuestos en partes iguales. ¿Qué cantidad de cada tipo de producto comercial se necesita para obtener la mezcla deseada?

6. Calcula una parábola cuya gráfica pasa por los puntos $(2, 0)$, $(3, 0)$ y $(-1, 12)$.

7. Calcula a, b, c y d de forma que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, se verifique la igualdad

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 9x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

8. Las tres cifras de un número suman 21. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras se obtiene 198. Además, la cifra de las decenas es igual a la media aritmética de las otras dos. Calcula dicho número.

9. Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros a, b.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + ay - z = 0 \\ x - ay = 3 \\ 2ax + y - z = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} -x + ay - z = 2 \\ x + y - az = 3a + 1 \\ ax - y - z = 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + ay + bz = 0 \\ 2x + 2ay + bz = 1 \\ 2x + 3y + bz = 0 \end{array} \right.$$

10. Calcula los coeficientes de las siguientes reacciones químicas para que el número de átomos de cada elemento antes y después de la reacción sea el mismo.

    a) $\mathrm{x_1FeS_2 + x_2S_2 \to x_3Fe_2O_3 + x_4SO_2}$.

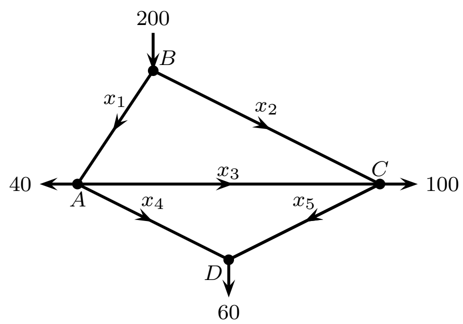
    b) $\mathrm{x_1NaHCO_3 + x_2H_3C_6H_5O_7 \to x_3Na_3C_6H_5O_7 + x_4H_2O + x_5CO_2}$.

11. Calcula una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ sabiendo que su producto por los vectores columna $(1,2,-2)^t$, $(2,1,-2)^t$, $(-1,0,1)^t$ es respectivamente igual a los vectores columna $(3,1,-3)^t$, $(4,-1,-1)^t$, $(-2,1,0)^t$.

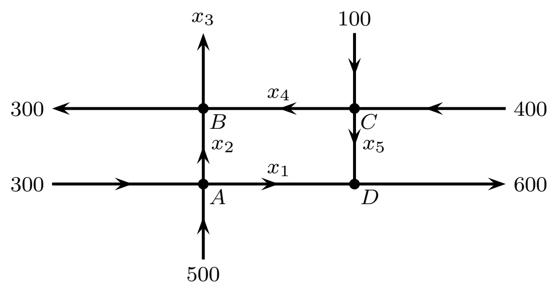
REDES

Una *red* consiste en un conjunto de puntos o *nodos* interconectados con líneas o *arcos*. La dirección del flujo se indica por flechas, y la cantidad de flujo en cada arco o bien es un dato conocido o una variable. Como el flujo que entra en la red es el mismo que sale, y el flujo entrante en un nodo es igual al flujo saliente del mismo, se obtienen sistemas de ecuaciones lineales cuya solución permite analizar el flujo en la red.

12. Analiza el flujo de la red de calles que se muestra en la figura (las tasas de flujo se dan en automóviles por minuto). ¿Qué valor mínimo tiene x_1 cuando $x_4 = 0$?



13. Calcula el rango de valores que pueden tener las variables x_1, x_2 y x_5 en la siguiente red que muestra el flujo de automóviles por minuto en las calles de una ciudad.



14. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n tal que la suma de los elementos de cada fila es cero. Prueba que $\mathbf{A}$ no es inversible.

15. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices $m \times n$ tales que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}^t = \mathbf{B}\cdot\mathbf{x}^t$ para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. ¿Qué relación hay entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$?

16. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada regular prueba que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^t = \left(\mathbf{A}^t\right)^{-1}$.

17. Calcula el producto de matrices $(a,b,c)^t\cdot(x,y,z)$.