Cálculo I
El cuerpo de los números reales

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

A estas alturas, los números naturales:

A estas alturas, los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

A estas alturas, los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

deben ya ser buenos amigos tuyos.

A estas alturas, los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

deben ya ser buenos amigos tuyos. También conoces hace tiempo a los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

A estas alturas, los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

deben ya ser buenos amigos tuyos. También conoces hace tiempo a los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Como sabes, los cocientes de números enteros forman los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

A estas alturas, los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

deben ya ser buenos amigos tuyos. También conoces hace tiempo a los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Como sabes, los cocientes de números enteros forman los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}; \qquad \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}; \qquad \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

La suma, o adición, y el producto, o multiplicación, de números racionales tienen las siguientes propiedades que se deducen fácilmente de las propiedades de la suma y el producto de los números enteros:

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}; \qquad \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

La suma, o adición, y el producto, o multiplicación, de números racionales tienen las siguientes propiedades que se deducen fácilmente de las propiedades de la suma y el producto de los números enteros:

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z=x+(y+z)\ ;\ (xy)z=x(yz)\quad \forall x,y,z\in\mathbb{Q}.$

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}; \qquad \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

La suma, o adición, y el producto, o multiplicación, de números racionales tienen las siguientes propiedades que se deducen fácilmente de las propiedades de la suma y el producto de los números enteros:

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z=x+(y+z)$; $(xy)z=x(yz)$ $\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$.

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y=y+x$; $xy=yx$ $\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

Propiedades algebraicas

Los números racionales se pueden sumar y multiplicar según las reglas siguientes:

$$\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{pn+mq}{qn}; \qquad \frac{p}{q}\frac{m}{n}=\frac{pm}{qn}$$

La suma, o adición, y el producto, o multiplicación, de números racionales tienen las siguientes propiedades que se deducen fácilmente de las propiedades de la suma y el producto de los números enteros:

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z=x+(y+z)\ ;\ (xy)z=x(yz) \quad \forall x,y,z\in\mathbb{Q}.$

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y=y+x\ ;\ xy=yx \quad \forall x,y\in\mathbb{Q}.$

A3 **Elementos neutros.** Hay elementos neutros para la adición y para el producto.

$$0+x=x \quad ; \quad 1x=x \quad \forall x\in\mathbb{Q}.$$

Propiedades algebraicas

A4 **Elementos opuesto e inverso.** Para cada número $x \in \mathbb{Q}$ hay un número llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x \in \mathbb{Q}$, tal que $x + (-x) = 0$.
Para cada número $x \in \mathbb{Q}$ distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número llamado *inverso de* x, que representamos por $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, tal que $xx^{-1} = 1$.

Propiedades algebraicas

A4 **Elementos opuesto e inverso.** Para cada número $x \in \mathbb{Q}$ hay un número llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x \in \mathbb{Q}$, tal que $x + (-x) = 0$.
Para cada número $x \in \mathbb{Q}$ distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número llamado *inverso de* x, que representamos por $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, tal que $xx^{-1} = 1$.

A5 **Propiedad distributiva.** $(x + y)z = xz + yz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Propiedades de orden

Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Propiedades de orden

Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{Q}^+$ los números racionales positivos. Las propiedades siguientes son de fácil comprobación:

Propiedades de orden

Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{Q}^+$ los números racionales positivos. Las propiedades siguientes son de fácil comprobación:

- **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

Propiedades de orden

Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{Q}^+$ los números racionales positivos. Las propiedades siguientes son de fácil comprobación:

- **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.
- **Estabilidad de $\mathbb{Q}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Propiedades de orden

Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{Q}^+$ los números racionales positivos. Las propiedades siguientes son de fácil comprobación:

- **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.
- **Estabilidad de $\mathbb{Q}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Propiedades de orden

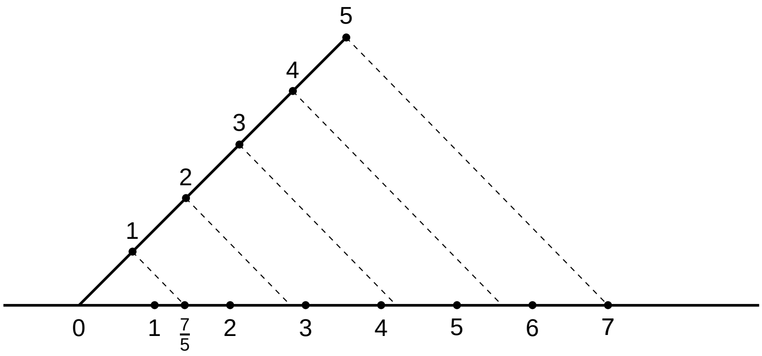
Decimos que un número racional $x = \dfrac{p}{q}$ es *positivo* y escribimos $x > 0$ o $0 < x$ cuando $pq \in \mathbb{N}$.

Representaremos por $\mathbb{Q}^+$ los números racionales positivos. Las propiedades siguientes son de fácil comprobación:

- **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{Q}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.
- **Estabilidad de $\mathbb{Q}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los opuestos de los números positivos se llaman *números negativos*. Observa que 0 no es positivo ni negativo.

Representación gráfica de los números racionales



Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.
Toma valores positivos porque $f(2) = 2 > 0$ y toma valores negativos porque $f(0) = -2 < 0$. Dicha función no se anula nunca.

Carencias de los números racionales

Hay ecuaciones polinómicas muy sencillas que no tienen soluciones racionales.

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones racionales porque no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

La función $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ es una función polinómica y, por tanto, continua.
Toma valores positivos porque $f(2) = 2 > 0$ y toma valores negativos porque $f(0) = -2 < 0$. Dicha función no se anula nunca.

Es decir, si trabajamos solamente con números racionales el teorema de los ceros de Bolzano no se cumple.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.
Supongamos que queremos medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$. Elegimos como unidad de medida un segmento $\overline{OU}$.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.
Supongamos que queremos medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$. Elegimos como unidad de medida un segmento $\overline{OU}$.
Puede ocurrir que $\overline{OU}$ esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$, pero lo más frecuente es que esto no suceda, en cuyo caso dividimos el segmento $\overline{OU}$ en un número n de partes iguales y tomamos como nueva unidad de medida el segmento $\overline{OV} = \dfrac{1}{n}\overline{OU}$ de forma que $\overline{OV}$ esté contenido un número exacto, m, de veces en $\overline{AB}$.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.
Supongamos que queremos medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$. Elegimos como unidad de medida un segmento $\overline{OU}$.
Puede ocurrir que $\overline{OU}$ esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$, pero lo más frecuente es que esto no suceda, en cuyo caso dividimos el segmento $\overline{OU}$ en un número n de partes iguales y tomamos como nueva unidad de medida el segmento $\overline{OV} = \dfrac{1}{n}\overline{OU}$ de forma que $\overline{OV}$ esté contenido un número exacto, m, de veces en $\overline{AB}$.
Tenemos entonces que $\overline{AB} = m\overline{OV} = \dfrac{m}{n}\overline{OU}$ y el cociente de longitudes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}} = \frac{m}{n}$$

es un número racional.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.
Supongamos que queremos medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$. Elegimos como unidad de medida un segmento $\overline{OU}$.
Puede ocurrir que $\overline{OU}$ esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$, pero lo más frecuente es que esto no suceda, en cuyo caso dividimos el segmento $\overline{OU}$ en un número n de partes iguales y tomamos como nueva unidad de medida el segmento $\overline{OV} = \dfrac{1}{n}\overline{OU}$ de forma que $\overline{OV}$ esté contenido un número exacto, m, de veces en $\overline{AB}$.
Tenemos entonces que $\overline{AB} = m\overline{OV} = \dfrac{m}{n}\overline{OU}$ y el cociente de longitudes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}} = \frac{m}{n}$$

es un número racional.
En tal caso se dice que los segmentos $\overline{OU}$ y $\overline{AB}$ son ***conmensurables***, lo que significa que tienen una unidad de medida común: el segmento $\overline{OV}$ que está contenido n veces en $\overline{OU}$ y m veces en $\overline{AB}$.

Medida de magnitudes

Para medir una magnitud elegimos una cierta cantidad de la misma que tomamos como unidad y comparamos con dicha unidad otras cantidades.
Supongamos que queremos medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$. Elegimos como unidad de medida un segmento $\overline{OU}$.
Puede ocurrir que $\overline{OU}$ esté contenido un número exacto de veces en $\overline{AB}$, pero lo más frecuente es que esto no suceda, en cuyo caso dividimos el segmento $\overline{OU}$ en un número n de partes iguales y tomamos como nueva unidad de medida el segmento $\overline{OV} = \dfrac{1}{n}\overline{OU}$ de forma que $\overline{OV}$ esté contenido un número exacto, m, de veces en $\overline{AB}$.
Tenemos entonces que $\overline{AB} = m\overline{OV} = \dfrac{m}{n}\overline{OU}$ y el cociente de longitudes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}} = \frac{m}{n}$$

es un número racional.
En tal caso se dice que los segmentos $\overline{OU}$ y $\overline{AB}$ son ***conmensurables***, lo que significa que tienen una unidad de medida común: el segmento $\overline{OV}$ que está contenido n veces en $\overline{OU}$ y m veces en $\overline{AB}$.

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?
La intuición dice que sí. Los pitagóricos descubrieron que no.

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?
La intuición dice que sí. Los pitagóricos descubrieron que no.
Considera la diagonal $\overline{AB}$ del cuadrado de lado $\overline{OU}$.

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?
La intuición dice que sí. Los pitagóricos descubrieron que no.
Considera la diagonal $\overline{AB}$ del cuadrado de lado $\overline{OU}$.Por el teorema de Pitágoras: $\overline{OU}^2 + \overline{OU}^2 = \overline{AB}^2$.

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?
La intuición dice que sí. Los pitagóricos descubrieron que no.
Considera la diagonal $\overline{AB}$ del cuadrado de lado $\overline{OU}$.Por el teorema de Pitágoras: $\overline{OU}^2 + \overline{OU}^2 = \overline{AB}^2$.Por tanto

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}}\right)^2 = 2$$

lo que, según sabemos implica que el cociente $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OU}}$ no es un número racional, es decir, la diagonal de un cuadrado y su lado no son segmentos conmensurables.

Segmentos inconmensurables

¿Dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables?
La intuición dice que sí. Los pitagóricos descubrieron que no.
Considera la diagonal $\overline{AB}$ del cuadrado de lado $\overline{OU}$.Por el teorema de Pitágoras: $\overline{OU}^2 + \overline{OU}^2 = \overline{AB}^2$.Por tanto

$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OU}}\right)^2 = 2$$

lo que, según sabemos implica que el cociente $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OU}}$ no es un número racional, es decir, la diagonal de un cuadrado y su lado no son segmentos conmensurables.Se dice que tales segmentos son ***inconmensurables***.

Los números racionales no son suficientes para medir magnitudes

Es claro que la longitud de la diagonal de un cuadrado tiene que tener un valor numérico exacto.

Los números racionales no son suficientes para medir magnitudes

Es claro que la longitud de la diagonal de un cuadrado tiene que tener un valor numérico exacto.

Si tomamos como unidad de medida el lado del cuadrado dicho valor no es un número racional.

Los números racionales no son suficientes para medir magnitudes

Es claro que la longitud de la diagonal de un cuadrado tiene que tener un valor numérico exacto.

Si tomamos como unidad de medida el lado del cuadrado dicho valor no es un número racional.

Por tanto, *si solamente usamos los números racionales para medir longitudes nos encontramos con la extraña situación de que hay segmentos a los que no podemos asignar una longitud.*

Los números racionales no son suficientes para medir magnitudes

Es claro que la longitud de la diagonal de un cuadrado tiene que tener un valor numérico exacto.

Si tomamos como unidad de medida el lado del cuadrado dicho valor no es un número racional.

Por tanto, *si solamente usamos los números racionales para medir longitudes nos encontramos con la extraña situación de que hay segmentos a los que no podemos asignar una longitud.*

Este fue el gran descubrimiento que hicieron los pitagóricos y que tuvo extraordinaria influencia en el desarrollo científico en Europa

En la recta racional hay huecos

Imaginemos que en una recta hemos fijado un origen y una unidad y representado en ella todos los números racionales. Dicha recta se llama la *recta racional*.

En la recta racional hay huecos

Imaginemos que en una recta hemos fijado un origen y una unidad y representado en ella todos los números racionales. Dicha recta se llama la *recta racional*.

Si construimos un cuadrado de lado unidad y llevamos con un compás sobre la recta la longitud de la diagonal de dicho cuadrado obtenemos un punto de la recta que no está en la recta racional. Es decir, en la recta racional hay huecos.

En la recta racional hay huecos

Imaginemos que en una recta hemos fijado un origen y una unidad y representado en ella todos los números racionales. Dicha recta se llama la *recta racional*.

Si construimos un cuadrado de lado unidad y llevamos con un compás sobre la recta la longitud de la diagonal de dicho cuadrado obtenemos un punto de la recta que no está en la recta racional. Es decir, en la recta racional hay huecos.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Para poder asegurar que la función continua $f(x) = x^2 - 2$ que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Para poder asegurar que la función continua $f(x) = x^2 - 2$ que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto.
- Para asignar una medida a la diagonal del cuadrado de lado unidad.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Para poder asegurar que la función continua $f(x) = x^2 - 2$ que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto.
- Para asignar una medida a la diagonal del cuadrado de lado unidad.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Para poder asegurar que la función continua $f(x) = x^2 - 2$ que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto.
- Para asignar una medida a la diagonal del cuadrado de lado unidad.

Es necesario considerar un número cuyo cuadrado sea igual a 2. Sabemos que dicho número no puede ser racional.

Necesidad de los números irracionales

Resumen de lo visto:

- Para resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$.
- Para poder asegurar que la función continua $f(x) = x^2 - 2$ que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto.
- Para asignar una medida a la diagonal del cuadrado de lado unidad.

Es necesario considerar un número cuyo cuadrado sea igual a 2. Sabemos que dicho número no puede ser racional.

Surgen así unos nuevos números que no son racionales a los que se llama ***irracionales*** y que podemos interpretar como longitudes de segmentos inconmensurables con la unidad.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

No es nada fácil describir los números irracionales mediante los números enteros. Por ello, no vamos a decir cómo se obtienen los números irracionales a partir de los racionales.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

No es nada fácil describir los números irracionales mediante los números enteros. Por ello, no vamos a decir cómo se obtienen los números irracionales a partir de los racionales.

Adoptaremos un punto de vista abstracto.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

No es nada fácil describir los números irracionales mediante los números enteros. Por ello, no vamos a decir cómo se obtienen los números irracionales a partir de los racionales.

Adoptaremos un punto de vista abstracto.

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

No es nada fácil describir los números irracionales mediante los números enteros. Por ello, no vamos a decir cómo se obtienen los números irracionales a partir de los racionales.

Adoptaremos un punto de vista abstracto.

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales.

Los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman números reales.

Números reales

Es muy fácil describir los números racionales mediante los números enteros.

No es nada fácil describir los números irracionales mediante los números enteros. Por ello, no vamos a decir cómo se obtienen los números irracionales a partir de los racionales.

Adoptaremos un punto de vista abstracto.

Representaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales.

Los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman números reales.

Todo lo que necesitamos para trabajar con números reales está contenido en las siguientes propiedades que suponemos ciertas. Son las *reglas del juego* o *axiomas* de nuestra teoría.

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y = y+x$; $xy = yx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y = y+x$; $xy = yx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

A3 **Elementos neutros.** Hay elementos neutros para la adición y para el producto. Dichos elementos se suponen *distintos* y se representan, respectivamente, por 0 y 1.

$$0+x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y = y+x$; $xy = yx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

A3 **Elementos neutros.** Hay elementos neutros para la adición y para el producto. Dichos elementos se suponen *distintos* y se representan, respectivamente, por 0 y 1.

$$0+x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A4 **Elementos opuesto e inverso.** Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$.
Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

Axiomas algebraicos

En $\mathbb{R}$ hay dos leyes de composición llamadas adición y producto que notamos, respectivamente, por $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ que satisfacen los siguientes axiomas.

A1 **Propiedades asociativas.**
$(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

A2 **Propiedades conmutativas.** $x+y = y+x$; $xy = yx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

A3 **Elementos neutros.** Hay elementos neutros para la adición y para el producto. Dichos elementos se suponen *distintos* y se representan, respectivamente, por 0 y 1.

$$0+x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A4 **Elementos opuesto e inverso.** Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$. Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

A5 **Propiedad distributiva.** $(x+y)z = xz+yz$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

Se define la *diferencia*:

$$x - y = x + (-y)$$

Se define la *diferencia*:

$$x - y = x + (-y)$$

También, supuesto $y \neq 0$, representamos su inverso en la forma

$$y^{-1} = \frac{1}{y}$$

Se define la *diferencia*:

$$x - y = x + (-y)$$

También, supuesto $y \neq 0$, representamos su inverso en la forma

$$y^{-1} = \frac{1}{y}$$

Y el producto xy^{-1} lo representamos por

$$xy^{-1} = x\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.Por ejemplo

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.Por ejemplo

- $x0 = 0$, en consecuencia 0 no tiene inverso.

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.Por ejemplo

- $x0 = 0$, en consecuencia 0 no tiene inverso.
- $xy = 0$ implica que $x = 0$ o $y = 0$.

Usando los cinco axiomas A1 – A5 podemos probar algunas propiedades conocidas de la suma y el producto.Por ejemplo

- $x0 = 0$, en consecuencia 0 no tiene inverso.
- $xy = 0$ implica que $x = 0$ o $y = 0$.
- $(-x)y = -xy = x(-y)$; $(-x)(-y) = xy$.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^{+}$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

A6 **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

A6 **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

A7 **Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

A6 **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

A7 **Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Axiomas de orden

En $\mathbb{R}$ hay un subconjunto, que notamos $\mathbb{R}^+$, cuyos elementos llamamos *números positivos*, que satisface los siguientes axiomas.

A6 **Ley de tricotomía.** Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; x es positivo; $-x$ es positivo.

A7 **Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los opuestos de los números positivos, es decir los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$, se llaman *números negativos*. Observa que 0 no es positivo ni negativo.

Relación de orden

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, decimos que x *es menor que* y o también que y *es mayor que* x, y escribimos $x < y$ o $y > x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Relación de orden

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, decimos que x *es menor que* y o también que y *es mayor que* x, y escribimos $x < y$ o $y > x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Decimos que x *es menor o igual que* y o también que y *es mayor o igual que* x, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
Equivalentemente, $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ significa que o bien es $x < y$ o es $x = y$.

Relación de orden

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, decimos que x *es menor que* y o también que y *es mayor que* x, y escribimos $x < y$ o $y > x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Decimos que x *es menor o igual que* y o también que y *es mayor o igual que* x, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$, cuando se verifica que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Equivalentemente, $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ significa que o bien es $x < y$ o es $x = y$.

En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observa que $x \in \mathbb{R}^- \iff -x \in \mathbb{R}^+$.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$ (propiedad transitiva).

Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades.

- $x \leqslant x$ (propiedad reflexiva).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$ (propiedad antisimétrica).
- $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$ (propiedad transitiva).
- Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, o $y < x$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia, si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia, si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$.

Usando los siete axiomas A1 – A7 podemos probar algunas propiedades conocidas de las desigualdades.Por ejemplo:

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia, si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$.
- Si $xy > 0$ entonces $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

Podemos dar un corte en la recta racional por un punto que no sea racional y de esta forma dividimos la recta racional en dos partes de modo que una queda a la izquierda de la otra y no hay ningún número racional entre ellas.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

Podemos dar un corte en la recta racional por un punto que no sea racional y de esta forma dividimos la recta racional en dos partes de modo que una queda a la izquierda de la otra y no hay ningún número racional entre ellas.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

Podemos dar un corte en la recta racional por un punto que no sea racional y de esta forma dividimos la recta racional en dos partes de modo que una queda a la izquierda de la otra y no hay ningún número racional entre ellas.

El axioma que vamos a poner prohíbe que en la **recta real** pase esto de modo que a cada punto de la recta real le corresponderá un único número real.

Los axiomas A1-A7 se cumplen en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Con dichos axiomas solamente no es posible probar que en nuestro conjunto $\mathbb{R}$ hay números no racionales.

Hace falta otro axioma.Hemos visto que en la recta racional hay huecos: entre dos puntos racionales de la recta puede haber puntos que no sean racionales.

Podemos dar un corte en la recta racional por un punto que no sea racional y de esta forma dividimos la recta racional en dos partes de modo que una queda a la izquierda de la otra y no hay ningún número racional entre ellas.

El axioma que vamos a poner prohíbe que en la **recta real** pase esto de modo que a cada punto de la recta real le corresponderá un único número real.

Axioma del continuo

A8 (Axioma del continuo) Si A y B son conjuntos no vacíos de números reales tales que todo número de A es menor o igual que todo número de B, entonces se verifica que hay algún *número real* que *separa* los conjuntos A y B, es decir, que es mayor o igual que todos los números de A y menor o igual que todos los números de B.

Axioma del continuo

A8 (Axioma del continuo) Si A y B son conjuntos no vacíos de números reales tales que todo número de A es menor o igual que todo número de B, entonces se verifica que hay algún *número real* que *separa* los conjuntos A y B, es decir, que es mayor o igual que todos los números de A y menor o igual que todos los números de B.

Este axioma implica que si damos un corte en la recta dicho corte lo hemos dado en un punto real.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\right\}$, $B = \left\{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\right\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

Hay un número $z \in \mathbb{R}$ que verifica que $z^2 = 2$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^+ : y^2 > 2\}$.

Sea $y \in B$. Pongamos $z = \dfrac{1}{2}\left(y + \dfrac{2}{y}\right)$.Como $y^2 > 2$ tenemos que $\dfrac{2}{y} < y$ por lo que $z < y$.

Como $0 < \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} - 4$ se tiene que $y^2 + \dfrac{4}{y^2} > 4$.De donde resulta enseguida que $z^2 > 2$ por lo que $z \in B$.

Sea $x \in A$. Si $x \leqslant 1$ entonces $x < \frac{5}{4} \in A$.Si $x > 1$ definimos $u = \dfrac{2 - x^2}{1 + 2x}$. Tenemos que $0 < u < 1$.

$$(x+u)^2 = x^2 + u^2 + 2ux < x^2 + u + 2ux = x^2 + u(1+2x) = 2$$

Luego $v = x + u \in A$ y $x < v$.
Por el axioma del continuo hay un $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.
Por lo antes visto, no puede ser $z^2 < 2$ ni tampoco $z^2 > 2$. Luego ha de ser $z^2 = 2$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v \in \mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x \leqslant v$ para todo $x \in E$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v \in \mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x \leqslant v$ para todo $x \in E$.

ii) Un número $u \in \mathbb{R}$ se dice que es un *minorante o cota inferior* de E si $u \leqslant x$ para todo $x \in E$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v \in \mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x \leqslant v$ para todo $x \in E$.
ii) Un número $u \in \mathbb{R}$ se dice que es un *minorante o cota inferior* de E si $u \leqslant x$ para todo $x \in E$.
iii) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.

Definiciones importantes

Sea E un conjunto no vacío de números reales.

i) Un número $v \in \mathbb{R}$ se dice que es un *mayorante o cota superior* de E si $x \leqslant v$ para todo $x \in E$.
ii) Un número $u \in \mathbb{R}$ se dice que es un *minorante o cota inferior* de E si $u \leqslant x$ para todo $x \in E$.
iii) Si hay algún elemento de E que también sea mayorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *máximo* de E y lo representaremos por $\max(E)$.
iv) Si hay algún elemento de E que también sea minorante de E, dicho elemento es necesariamente único, se llama *mínimo* de E y lo representaremos por $\min(E)$.

v) Un conjunto de números reales que tiene algún mayorante se dice que está *mayorado o acotado superiormente*.

v) Un conjunto de números reales que tiene algún mayorante se dice que está *mayorado o acotado superiormente*.

vi) Un conjunto de números reales que tiene algún minorante se dice que está *minorado o acotado inferiormente*.

v) Un conjunto de números reales que tiene algún mayorante se dice que está *mayorado o acotado superiormente*.

vi) Un conjunto de números reales que tiene algún minorante se dice que está *minorado o acotado inferiormente*.

vii) Un conjunto de números reales que está mayorado y minorado se dice que está *acotado*.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principios del supremo y del ínfimo

Principio del supremo. Para todo conjunto de números reales no vacío y mayorado se verifica que el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Principio del ínfimo. Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
- Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
- Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
- Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
- Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

  Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $\beta - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y mayorado. Se define el ***supremo o extremo superior*** de E, como el ***mínimo mayorante*** de E y lo representaremos por $\sup(E)$.

Un número $\beta \in \mathbb{R}$ es el **supremo** de E quiere decir, por definición, que:

- $x \leqslant \beta$ para todo $x \in E$.
- Ningún número menor que β es mayorante de E, es decir, para cada $u < \beta$ hay algún $x \in E$ tal que $u < x$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

  Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $\beta - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Observa que

$$z \geqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \geqslant \sup(E)$$

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.
- Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.
- Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.
- Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.
- Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

  Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

Sea E un conjunto de números reales no vacío y minorado. Se define el ***ínfimo o extremo inferior*** de E como el ***máximo minorante*** de E y lo representaremos por $\inf(E)$.

Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el **ínfimo** de E quiere decir, por definición, que:

- $\alpha \leqslant x$ para todo $x \in E$.
- Ningún número mayor que α es minorante de E, es decir, para cada $v > \alpha$ hay algún $x \in E$ tal que $x < v$.

  Esto puede enunciarse de forma equivalente como sigue:

  Para cada $\varepsilon > 0$ hay hay algún $x_\varepsilon \in E$ tal que $x_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

Observa que

$$z \leqslant x \ (\forall x \in E) \quad \Longleftrightarrow \quad z \leqslant \inf(E)$$

Intervalos de números reales

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, $\emptyset$, se considera también como un intervalo.

Intervalos de números reales

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Los intervalos de números reales pueden ser fácilmente descritos gracias a los principios del supremo y del ínfimo.

Además de $\mathbb{R}$ y de $\emptyset$, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$[a,b] \quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado y acotado)}$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \end{array}$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}
\end{aligned}
$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{array}{rcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
]-\infty,c[\quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \quad \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}
$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{lcll}
]-\infty,c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty,c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}
\end{array}$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)} \end{array}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{rcll}]-\infty,c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\ ]-\infty,c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\ ]c,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x > c\} & \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \end{array}$$

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.
Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{aligned}
]-\infty, c[&= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty, c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\
]c, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} && \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \\
[c, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} && \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0.$
- Si $xy > 0$ entonces $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2$.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La siguiente estrategia es con frecuencia útil para probar igualdades o desigualdades entre números positivos.

Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que:

- $a = b \iff a^2 = b^2$.
- $a < b \iff a^2 < b^2$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.
ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.
iii) $|xy| = |x||y|$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$.

v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$.

v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Si nos piden estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que $p(x) < q(x) \iff q(x) - p(x) > 0$, y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Desigualdades definidas por funciones polinómicas

Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.Lo que se hace en este tipo de ejercicios es factorizar el polinomio $p(x)$. Para ello se calculan las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$.Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con *coeficientes enteros* y *coeficiente del término de mayor grado igual a 1*, pues sabemos que *dichas raíces deben ser divisores del término independiente*.

Si nos piden estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que $p(x) < q(x) \iff q(x) - p(x) > 0$, y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Desigualdades definidas por funciones racionales

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$.

Basta observar para ello que

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \iff p(x)q(x) > 0$$

y esta última desigualdad es del tipo ya estudiado porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Si queremos calcular para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica una desigualdad del tipo $R(x) < Q(x)$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales, basta observar que la desigualdades $R(x) < Q(x)$ y $Q(x) - R(x) > 0$ son equivalentes y que $Q(x) - R(x)$ es una función racional por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos.

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x).$

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)|+|g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \text{ o } f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$

Desigualdades con valores absolutos

La estrategia general consiste en considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.Para ello hay que recordar muy bien las propiedades del valor absoluto.Veamos algunos ejemplos.

- $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \iff f(x)g(x) \geqslant 0.$
- $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x) \text{ o } f(x) = -g(x).$
- $|f(x)| \leqslant g(x) \iff -g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$
- $|f(x)| \geqslant a \iff f(x) \geqslant a \text{ o } f(x) \leqslant -a$ donde se supone que $a > 0$.

Observación importante

Observación importante

En esta asignatura trabajamos con precisión infinita y ***no usamos decimales***. *Esto quiere decir que las raíces, los logaritmos, las exponenciales y otras funciones no se calculan, se dejan expresados simbólicamente. No uséis decimales en esta asignatura.*