Cálculo I
Potencias y raíces

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define $x^q = \left(\frac{1}{x}\right)^{-q}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define
$x^q = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-q}$.

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifica:

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define $x^q = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-q}$.

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifica:

i) $x^m x^n = x^{m+n}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define
$x^q = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-q}$.

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifica:

i) $x^m x^n = x^{m+n}$.

ii) $(xy)^n = x^n y^n$. En particular, $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define

$$x^q = \left(\frac{1}{x}\right)^{-q}.$$

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifica:

i) $x^m x^n = x^{m+n}$.

ii) $(xy)^n = x^n y^n$. En particular, $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$.

iii) $(x^m)^n = x^{mn}$. En consecuencia, $x^{2n} > 0$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $x^1 = x$, y $x^{n+1} = x^n x \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x \neq 0$ se define $x^0 = 1$.

Para todo entero negativo q y para todo $x \neq 0$ se define $x^q = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-q}$.

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de cero y $m, n \in \mathbb{Z}$ se verifica:

i) $x^m x^n = x^{m+n}$.

ii) $(xy)^n = x^n y^n$. En particular, $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$.

iii) $(x^m)^n = x^{mn}$. En consecuencia, $x^{2n} > 0$.

iv) Además, si $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ entonces se verifica que $x < y$ si, y sólo si, $x^n < y^n$.

Fórmula del binomio de Newton. Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Fórmula del binomio de Newton. Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Suma de una progresión geométrica. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Se verifica:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Fórmula del binomio de Newton. Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Suma de una progresión geométrica. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Se verifica:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Igualdad para una diferencia de potencias. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. Entonces se verifica la igualdad:

$$b^q - a^q = (b-a) \sum_{k=0}^{q-1} b^k a^{q-1-k}$$

Fórmula del binomio de Newton. Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Suma de una progresión geométrica. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Se verifica:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Igualdad para una diferencia de potencias. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$. Entonces se verifica la igualdad:

$$b^q - a^q = (b-a) \sum_{k=0}^{q-1} b^k a^{q-1-k}$$

Supremo de las potencias k-ésimas. Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales positivos y $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Sean $\alpha = \inf(A)$ y $\beta = \sup(A)$. Definamos el conjunto

$$B = \{a^k : a \in A\}$$

Se verifica que $\inf(B) = \alpha^k$ y $\sup(B) = \beta^k$.

Existencia de raíces

Dados un número real $a > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, existe un único número real ***positivo*** $b > 0$ que verifica que $b^k = a$. Dicho número real b se llama la *raíz k-ésima o de orden k* de a y se representa por $\sqrt[k]{a}$ o por $a^{1/k}$.

Existencia de raíces

Dados un número real $a > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, existe un único número real ***positivo*** $b > 0$ que verifica que $b^k = a$. Dicho número real b se llama la *raíz k-ésima o de orden k* de a y se representa por $\sqrt[k]{a}$ o por $a^{1/k}$.

Además, si $x > 0$ e $y > 0$, se verifica que:

Existencia de raíces

Dados un número real $a > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, existe un único número real ***positivo*** $b > 0$ que verifica que $b^k = a$. Dicho número real b se llama la *raíz k-ésima o de orden k* de a y se representa por $\sqrt[k]{a}$ o por $a^{1/k}$.

Además, si $x > 0$ e $y > 0$, se verifica que:

i) $x < y$ si, y sólo si, $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$,

Existencia de raíces

Dados un número real $a > 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, existe un único número real ***positivo*** $b > 0$ que verifica que $b^k = a$. Dicho número real b se llama la *raíz k-ésima o de orden k* de a y se representa por $\sqrt[k]{a}$ o por $a^{1/k}$.

Además, si $x > 0$ e $y > 0$, se verifica que:

i) $x < y$ si, y sólo si, $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$,

ii) $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

Existencia de números irracionales

Dados $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\sqrt[k]{n}$ o bien es un número natural o bien es irracional.

Existencia de números irracionales

Dados $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\sqrt[k]{n}$ o bien es un número natural o bien es irracional.

Un conjunto A de números reales se dice que es *denso* en un intervalo I, si entre dos números reales cualesquiera de I siempre hay algún número real que está en A. En particular, A es denso en $\mathbb{R}$ si en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de A.

Existencia de números irracionales

Dados $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\sqrt[k]{n}$ o bien es un número natural o bien es irracional.

Un conjunto A de números reales se dice que es *denso* en un intervalo I, si entre dos números reales cualesquiera de I siempre hay algún número real que está en A. En particular, A es denso en $\mathbb{R}$ si en todo intervalo abierto no vacío hay puntos de A.

Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.