Cálculo I
Logaritmos y exponenciales
Sucesiones parciales
Teorema de Bolzano – Weierstrass
Complitud de $\mathbb{R}$

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Desigualdad básica. $ab^n < \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b, \forall n \in \mathbb{N}$

Desigualdad básica. $ab^n < \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \, a \neq b, \forall n \in \mathbb{N}$

Para todo número real positivo $x \neq 1$ se verifica que la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}$ es estrictamente decreciente y convergente.

Desigualdad básica. $ab^n < \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ a \neq b, \forall n \in \mathbb{N}$

Para todo número real positivo $x \neq 1$ se verifica que la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x} - 1)\}$ es estrictamente decreciente y convergente.

*La función **logaritmo natural**, también llamada **logaritmo neperiano** o, simplemente, logaritmo, es la función* $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} \{n(\sqrt[n]{x} - 1)\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Desigualdad básica. $ab^n < \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \neq b, \forall n \in \mathbb{N}$

Para todo número real positivo $x \neq 1$ se verifica que la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ es estrictamente decreciente y convergente.

La función ***logaritmo natural****, también llamada* ***logaritmo neperiano*** *o, simplemente, logaritmo, es la función* $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} \{n(\sqrt[n]{x}-1)\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Para todo $x > 0$, $x \neq 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\log(x) = \inf\{n(\sqrt[n]{x}-1) : n \in \mathbb{N}\} < n(\sqrt[n]{x}-1)$$

Desigualdad básica. $ab^n < \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^+,\ a\neq b, \forall n\in\mathbb{N}$

Para todo número real positivo $x \neq 1$ se verifica que la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ es estrictamente decreciente y convergente.

La función ***logaritmo natural****, también llamada* ***logaritmo neperiano*** *o, simplemente, logaritmo, es la función* $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty}\{n(\sqrt[n]{x}-1)\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+$$

Para todo $x > 0$, $x \neq 1$, y para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\log(x) = \inf\{n(\sqrt[n]{x}-1) : n\in\mathbb{N}\} < n(\sqrt[n]{x}-1)$$

Cualesquiera sean los números positivos x,y se verifica que

$$\log(xy) = \log(x)+\log(y);\ \ \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x)-\log(y).$$

Además la función logaritmo es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

El número e

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

El número e

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad básica n por $n+1$, $a = 1$, $b = n/(n+1)$ y pasando a inversos obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

El número e

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad básica n por $n+1$, $a = 1$, $b = n/(n+1)$ y pasando a inversos obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hemos probado así que la sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$ es estrictamente creciente e $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

El número e

Dado $n \in \mathbb{N}$, haciendo en la desigualdad básica $a = 1$, $b = 1 + \dfrac{1}{n}$, obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad básica n por $n+1$, $a = 1$, $b = n/(n+1)$ y pasando a inversos obtenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Hemos probado así que la sucesión $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$ es estrictamente creciente e $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es estrictamente decreciente.

Además, como $x_1 \leqslant x_n < y_n \leqslant y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que ambas sucesiones son acotadas y, al ser monótonas, son convergentes.

El número e

Como $y_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ se sigue que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa por la letra “e”.

El número e

Como $y_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ se sigue que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa por la letra “e”.

Así, $e \in \mathbb{R}$ es el número real definido por:

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y también

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

El número e

Como $y_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ se sigue que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$. El valor común de este límite es un número real que se representa por la letra “e”.

Así, $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ es el número real definido por:

$$\mathrm{e} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$$

y también

$$\mathrm{e} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \inf\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

En particular, se verifica que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.

Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.

La **función exponencial** es la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.

La **función exponencial** es la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Sea $\lim\{x_n\} = x$ cumpliéndose que $0 < x_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica que $\lim\{n(\sqrt[n]{x_n} - 1)\} = \log(x)$.

Dado un número real $x \neq 0$ se verifica que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

para todo número natural $n > -x$. Además la sucesión $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y su límite es un número real positivo.

La **función exponencial** es la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}.$$

Sea $\lim\{x_n\} = x$ cumpliéndose que $0 < x_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica que $\lim\{n(\sqrt[n]{x_n} - 1)\} = \log(x)$.

La función logaritmo es una biyección de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa es la función exponencial.

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

Se verifica que $(\sqrt[q]{x}\,)^p = \sqrt[q]{x^p}$

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

Dados $x > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

Se verifica que $(\sqrt[q]{x})^p = \sqrt[q]{x^p}$

Si $p/q = m/n$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{p/q} = x^{m/n}$.

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y), \quad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

Dados $x>0$, $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}$, definimos $x^{p/q}=\sqrt[q]{x^p}$.

Se verifica que $(\sqrt[q]{x}\,)^p=\sqrt[q]{x^p}$

Si $p/q=m/n$ donde $m\in\mathbb{Z}$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces $x^{p/q}=x^{m/n}$.

En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r=x^{p/q}$, donde $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}$ son tales que $r=p/q$.

La función exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y),\quad \exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

cualesquiera sean los números reales x e y.

Dados $x>0$, $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}$, definimos $x^{p/q}=\sqrt[q]{x^p}$.

Se verifica que $(\sqrt[q]{x})^p=\sqrt[q]{x^p}$

Si $p/q=m/n$ donde $m\in\mathbb{Z}$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces $x^{p/q}=x^{m/n}$.

En consecuencia, si r es un número racional podemos definir, sin ambigüedad alguna, la potencia x^r por $x^r=x^{p/q}$, donde $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}$ son tales que $r=p/q$.

Para todo número racional $r\in\mathbb{Q}$ y todo número real y se verifica que $\exp(ry)=(\exp(y))^r$. En particular, $\exp(r)=\mathrm{e}^r$. Además, para todo $x\in\mathbb{R}$ se verifica que

$$\exp(x)=\sup\{\mathrm{e}^r : r\in\mathbb{Q},\ r<x\}.$$

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como “la potencia x del número e”.

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como "la potencia x del número e".

Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y \log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como “la potencia x del número e”.

Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y \log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Leyes de los exponentes. Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como "la potencia x del número e".

Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y \log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Leyes de los exponentes. Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Dado un número positivo $a > 0$ la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\exp_a(x) = a^x$, se llama **función exponencial de base** a.

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como “la potencia x del número e”.

Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y \log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Leyes de los exponentes. Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Dado un número positivo $a > 0$ la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\exp_a(x) = a^x$, se llama **función exponencial de base** a.

Dado un número positivo $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$ por $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$, se llama **función logaritmo de base** a.

El número $\exp(x)$ se representa simbólicamente por e^x y puede interpretarse como "la potencia x del número e".

Dados dos números reales $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, se define la potencia x^y de **base** x y **exponente** y como el número real dado por

$$\boxed{x^y = \exp(y \log(x))}$$

Definimos también $0^x = 0$ para todo $x > 0$ y $0^0 = 1$.

Leyes de los exponentes. Cualesquiera sean $a > 0$, $b > 0$ y para todos x, y en $\mathbb{R}$, se verifica que

$$a^{x+y} = a^x a^y; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Dado un número positivo $a > 0$ la función $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\exp_a(x) = a^x$, se llama **función exponencial de base** a.

Dado un número positivo $a > 0$ y $a \neq 1$, la función $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$ por $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$, se llama **función logaritmo de base** a.

Dado un número real b la función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, definida para todo $x > 0$ por $x \mapsto x^b$, se llama **función potencia de exponente** b.

a) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

a) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

b) $\left|\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ para todo $x > -1$, $x \neq 0$.

a) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

b) $\left|\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ para todo $x > -1$, $x \neq 0$.

c) $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$ para todo número real x, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

a) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

b) $\left|\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ para todo $x > -1$, $x \neq 0$.

c) $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$ para todo número real x, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

d) $\left|\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right| < |\,\mathrm{e}^x - 1|$ para todo $x \neq 0$.

e) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, la sucesión $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a e^x.

a) $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ para todo $x > -1$, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

b) $\left|\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1\right| < \dfrac{|x|}{1+x}$ para todo $x > -1$, $x \neq 0$.

c) $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$ para todo número real x, y la desigualdad es estricta si $x \neq 0$.

d) $\left|\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1\right| < |\mathrm{e}^x - 1|$ para todo $x \neq 0$.

e) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, la sucesión $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a e^x.

f) Una sucesión de números positivos $\{y_n\}$ converge a un número positivo $y > 0$ si, y sólo si, la sucesión $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $-1 < x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \ \text{ y } \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e\,.$$

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $-1 < x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e\,.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim\{x_n\} = 0$ y $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $-1 < x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = \mathrm{e}\,.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim\{x_n\} = 0$ y $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

c) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $0 < x_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 1$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1.$$

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $-1 < x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = \mathrm{e}\,.$$

b) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim\{x_n\} = 0$ y $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

c) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $0 < x_n \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\{x_n\} = 1$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(x_n)}{x_n - 1} = 1.$$

d) Para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin [-1, 0]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \left\{\frac{1}{x_n}\right\} = 0$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}\,.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$.

Se dice que un número real z es un **valor de adherencia** de una sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a z.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$.

Se dice que un número real z es un **valor de adherencia** de una sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a z.

Si $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. En particular, un valor de adherencia de una sucesión parcial de $\{x_n\}$ también es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$.

Se dice que un número real z es un **valor de adherencia** de una sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a z.

Si $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. En particular, un valor de adherencia de una sucesión parcial de $\{x_n\}$ también es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

Si $\lim\{x_n\} = x$, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a x. En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.

Teorema de Bolzano -Weierstrass. Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente. Equivalentemente, toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un valor de adherencia.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.

Teorema de Bolzano -Weierstrass. Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente. Equivalentemente, toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un valor de adherencia.

Una sucesión acotada no convergente tiene al menos dos valores de adherencia.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y x un número real. Equivalen las siguientes afirmaciones:

i) x es un valor de adherencia de $\{x_n\}$.

ii) Todo intervalo abierto I que contiene a x contiene infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in I\}$ es infinito.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon\}$ es infinito.

Toda sucesión de números reales tiene una sucesión parcial monótona.

Teorema de Bolzano -Weierstrass. Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente. Equivalentemente, toda sucesión acotada de números reales tiene al menos un valor de adherencia.

Una sucesión acotada no convergente tiene al menos dos valores de adherencia.

Una sucesión acotada es convergente si y sólo si tiene un único valor de adherencia.

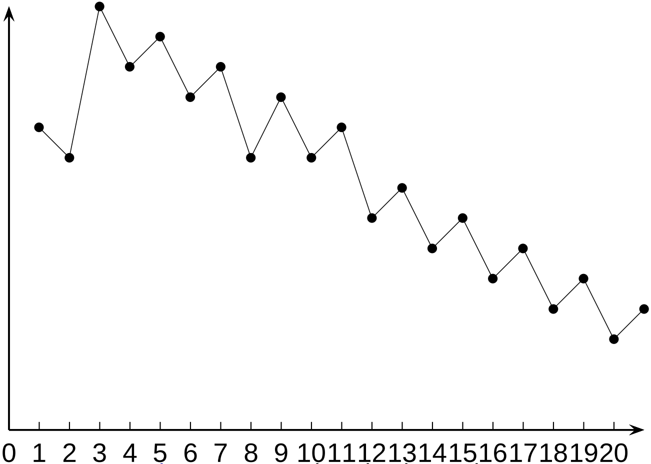

Figure: Puntos de sol y de sombra

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la **condición de Cauchy**, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$. Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Positivamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

- **Negativamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Para una sucesión $\{x_n\}$ de números reales equivalen las siguientes afirmaciones:

a) $\{x_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia;

b) $\{x_n\}$ no tiene ninguna sucesión parcial acotada;

c) Para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $|x_n| \geqslant K$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Positivamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

- **Negativamente divergente**, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

- **Divergente** cuando $\{|x_n|\} \to +\infty$.

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.
- $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.
- $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.
- La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo que la primera.

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.
- $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.
- La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo que la primera.
- La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.
- $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.
- La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo que la primera.
- La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.
- El producto de dos sucesiones divergentes (resp. positivamente divergentes) es otra sucesión divergente (resp. positivamente divergente).

- Supuesto $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.
- $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$.
- La suma de una sucesión divergente con una sucesión acotada es una sucesión divergente del mismo tipo que la primera.
- La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.
- El producto de dos sucesiones divergentes (resp. positivamente divergentes) es otra sucesión divergente (resp. positivamente divergente).
- El producto de una sucesión divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión divergente del mismo tipo que la primera.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sea $\alpha > 0$, y $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos. Se verifica que:

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sea $\alpha > 0$, y $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos. Se verifica que:

i) Si $\{x_n\} \to +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\log(x_n)\right|^{\mu}}{x_n^{\alpha}} = 0$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sea $\alpha > 0$, y $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos. Se verifica que:

i) Si $\{x_n\} \to +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\log(x_n)\right|^{\mu}}{x_n^{\alpha}} = 0$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Si $\{x_n\} \to 0$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n^{\alpha} \left|\log(x_n)\right|^{\mu} = 0$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.

a) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to +\infty$.

ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\} \to 0$.

b) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

iii) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$.

iv) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sea $\alpha > 0$, y $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos. Se verifica que:

i) Si $\{x_n\} \to +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\log(x_n)\right|^{\mu}}{x_n^{\alpha}} = 0$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.

ii) Si $\{x_n\} \to 0$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n^{\alpha}\left|\log(x_n)\right|^{\mu} = 0$ cualquiera sea $\mu \in \mathbb{R}$.

iii) Si $\{x_n\} \to +\infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{\alpha}}{e^{\mu x_n}} = 0$ cualquiera sea $\mu > 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

i) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

i) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

ii) $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

Se dice que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes y $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera. Se verifica que:

i) $\{x_n z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es convergente, en cuyo caso ambas sucesiones tienen el mismo límite.

ii) $\{x_n z_n\}$ es divergente si, y sólo si, $\{y_n z_n\}$ es divergente, en cuyo caso ambas sucesiones son divergentes del mismo tipo.

En particular, $\{x_n\}$ es convergente (resp. divergente) si, y sólo si, $\{y_n\}$ es convergente (resp. divergente), en cuyo caso ambas tienen igual límite (resp. son divergentes del mismo tipo).

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty-\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty-\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ donde las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas divergentes o ambas convergen a cero conducen a **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$". Dichas indeterminaciones pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ donde las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas divergentes o ambas convergen a cero conducen a **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$". Dichas indeterminaciones pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$ dan lugar a distintas indeterminaciones en los casos siguientes:

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ donde las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas divergentes o ambas convergen a cero conducen a **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$". Dichas indeterminaciones pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$ dan lugar a distintas indeterminaciones en los casos siguientes:

$\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ donde las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas divergentes o ambas convergen a cero conducen a **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$". Dichas indeterminaciones pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$ dan lugar a distintas indeterminaciones en los casos siguientes:

$\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")

$\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")

Las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Las sucesiones del tipo $\{x_n y_n\}$ donde $\{x_n\} \to 0$ y $\{y_n\}$ es divergente *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ donde las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son ambas divergentes o ambas convergen a cero conducen a **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$". Dichas indeterminaciones pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Las sucesiones del tipo $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$ dan lugar a distintas indeterminaciones en los casos siguientes:

$\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")

$\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "0^0")

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

iii) $\{x_n^{y_n}\} \to 0$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

iii) $\{x_n^{y_n}\} \to 0$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Criterio de Stolz. Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L$$

donde $L \in \mathbb{R}$, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

Criterio de la media aritmética. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\} \to L.$$

Criterio de la media aritmética. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L.$$

Criterio de la media geométrica. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L.$$

Criterio de la media aritmética. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L.$$

Criterio de la media geométrica. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L.$$

Supongamos que $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente.Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos que ambas sucesiones son convergentes.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente.Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos que ambas sucesiones son convergentes.

El número $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\liminf\{x_n\}$ y también $\underline{\lim}\{x_n\}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente.Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos que ambas sucesiones son convergentes.

El número $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\liminf\{x_n\}$ y también $\underline{\lim}\{x_n\}$.

El número $\beta = \lim\{\beta_n\}$ se llama **límite superior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\limsup\{x_n\}$ y también por $\overline{\lim}\{x_n\}$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión **acotada** y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$A_n = \{x_p : p \geqslant n\}, \quad \alpha_n = \inf(A_n), \quad \beta_n = \sup(A_n)$$

Como $A_{n+1} \subseteq A_n$ se tiene que

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}, \quad \beta_{n+1} \leqslant \beta_n$$

Por tanto la sucesión $\{\alpha_n\}$ es creciente y $\{\beta_n\}$ es decreciente.Además $\alpha_1 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y concluimos que ambas sucesiones son convergentes.

El número $\alpha = \lim\{\alpha_n\}$ se llama **límite inferior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\liminf\{x_n\}$ y también $\underline{\lim}\{x_n\}$.

El número $\beta = \lim\{\beta_n\}$ se llama **límite superior de la sucesión** $\{x_n\}$ y se representa por $\limsup\{x_n\}$ y también por $\overline{\lim}\{x_n\}$.

Nótese que $\alpha \leqslant \beta$ y además α y β vienen dados por:

$$\alpha = \lim\{\alpha_n\} = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \beta = \lim\{\beta_n\} = \inf\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\lim\sup\{x_n\} = +\infty$.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\lim\sup\{x_n\} = +\infty$.

ii) Si $\{x_n\}$ no está minorada definimos $\lim\inf\{x_n\} = -\infty$.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\limsup\{x_n\} = +\infty$.

ii) Si $\{x_n\}$ no está minorada definimos $\liminf\{x_n\} = -\infty$.

iii) Si $\{x_n\}$ está mayorada, $\beta_n = \sup\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\beta_n\} \to \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definimos $\limsup\{x_n\} = \beta$.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\limsup\{x_n\} = +\infty$.

ii) Si $\{x_n\}$ no está minorada definimos $\liminf\{x_n\} = -\infty$.

iii) Si $\{x_n\}$ está mayorada, $\beta_n = \sup\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\beta_n\} \to \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definimos $\limsup\{x_n\} = \beta$.

iv) Si $\{x_n\}$ está minorada, $\alpha_n = \inf\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\alpha_n\} \to \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos $\liminf\{x_n\} = \alpha$.

Una sucesión acotada es convergente si, y sólo si, su límite superior y su límite inferior son iguales, en cuyo caso ambos coinciden con el límite de la sucesión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.

i) Si $\{x_n\}$ no está mayorada definimos $\lim\sup\{x_n\} = +\infty$.

ii) Si $\{x_n\}$ no está minorada definimos $\lim\inf\{x_n\} = -\infty$.

iii) Si $\{x_n\}$ está mayorada, $\beta_n = \sup\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\beta_n\} \to \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definimos $\lim\sup\{x_n\} = \beta$.

iv) Si $\{x_n\}$ está minorada, $\alpha_n = \inf\{x_p : p \geqslant n\}$, y $\{\alpha_n\} \to \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definimos $\lim\inf\{x_n\} = \alpha$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de números positivos. Se verifica que:

$$\underline{\lim}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \leqslant \underline{\lim}\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \overline{\lim}\{\sqrt[n]{x_n}\} \leqslant \overline{\lim}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$$