Cálculo I
Números naturales, enteros, racionales

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x+1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Es claro que $\mathbb{N}$ es él mismo un conjunto inductivo: es el “más pequeño” conjunto inductivo de números reales. Este hecho, que se deduce directamente de la definición de $\mathbb{N}$, constituye el llamado “principio de inducción matemática”.

Un conjunto A de números reales se llama *inductivo* si $1 \in A$ y siempre que un número real x está en A se verifica que $x + 1$ también está en A.

El conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Es claro que $\mathbb{N}$ es él mismo un conjunto inductivo: es el "más pequeño" conjunto inductivo de números reales. Este hecho, que se deduce directamente de la definición de $\mathbb{N}$, constituye el llamado "principio de inducción matemática".

Principio de inducción matemática. *Si A es un conjunto inductivo de números naturales entonces $A = \mathbb{N}$.*

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.
B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

El Principio de inducción matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

A) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

B) Comprobamos que *si* un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que *si* $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Observa que en B) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es *suponer* que $P(n)$ es cierta.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n - 1) \in \mathbb{N}$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ implican que $x \in \mathbb{N}$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ implican que $x \in \mathbb{N}$.

iv) $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$ implican que $(m-n) \in \mathbb{N}$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ implican que $x \in \mathbb{N}$.

iv) $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$ implican que $(m-n) \in \mathbb{N}$.

v) $m \in \mathbb{N}$ y $n < m$ implican que $n+1 \leqslant m$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ implican que $x \in \mathbb{N}$.

iv) $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$ implican que $(m-n) \in \mathbb{N}$.

v) $m \in \mathbb{N}$ y $n < m$ implican que $n+1 \leqslant m$.

vi) $m \in \mathbb{N}$ implica que $(m+n) \in \mathbb{N}$ y $mn \in \mathbb{N}$.

Propiedades de los números naturales

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

i) $1 \leqslant n$.

ii) $n > 1$ implica que $(n-1) \in \mathbb{N}$.

iii) $x \in \mathbb{R}^+$ y $(x+n) \in \mathbb{N}$ implican que $x \in \mathbb{N}$.

iv) $m \in \mathbb{N}$ y $m > n$ implican que $(m-n) \in \mathbb{N}$.

v) $m \in \mathbb{N}$ y $n < m$ implican que $n+1 \leqslant m$.

vi) $m \in \mathbb{N}$ implica que $(m+n) \in \mathbb{N}$ y $mn \in \mathbb{N}$.

vii) $\mathbb{N}$ no tiene máximo.

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.
Si p, q son números enteros se tiene que:

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.
Si p, q son números enteros se tiene que:

i) $-p, p + q, p\,q$ son enteros.

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.
Si p, q son números enteros se tiene que:

i) $-p, p+q, p\,q$ son enteros.

ii) $p < q$ implica que $p+1 \leqslant q$.

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.
Si p, q son números enteros se tiene que:

i) $-p$, $p + q$, $p\,q$ son enteros.
ii) $p < q$ implica que $p + 1 \leqslant q$.

Un número real x decimos que es un *entero* si $x \in \mathbb{N}$ o $x = 0$ o $-x \in \mathbb{N}$. Representaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos ellos.

A los números naturales se les llama también *enteros positivos* y a sus opuestos *enteros negativos*.
Si p, q son números enteros se tiene que:

i) $-p$, $p + q$, $p\,q$ son enteros.
ii) $p < q$ implica que $p + 1 \leqslant q$.

Además, el conjunto de los números enteros no tiene máximo ni mínimo.

Un número real x se dice que es un número *racional* si $x = p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Representaremos con la letra $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales.

Un número real x se dice que es un número *racional* si $x = p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Representaremos con la letra $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales.

Las siguientes propiedades de los números racionales son de fácil comprobación.

Un número real x se dice que es un número *racional* si $x = p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Representaremos con la letra $\mathbb{Q}$ el conjunto de todos los números racionales.

Las siguientes propiedades de los números racionales son de fácil comprobación.

Si r, s son números racionales entonces $-r, r + s, rs$ y, si $r \neq 0$, $1/r$ son también racionales.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.
Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.
Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Propiedad arquimediana.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.
Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Propiedad arquimediana. Dado cualquier número real se verifica que hay números naturales mayores que él.

Teorema.
Todo conjunto de números enteros no vacío y mayorado tiene máximo.

Todo conjunto de números enteros no vacío y minorado tiene mínimo.

Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$.
Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Propiedad arquimediana. Dado cualquier número real se verifica que hay números naturales mayores que él.

Dado $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero q que verifica que $q \leqslant x < q + 1$. Dicho número entero se llama *parte entera* de x y se representa por $E(x)$.