Cálculo I
Continuidad

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

December 12, 2018

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un único elemento de* B.

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un único elemento de* B.

Observa que una función son *tres* cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B donde toma valores y la regla que la define. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de* A *asocia un único elemento de* B.

Observa que una función son *tres* cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B donde toma valores y la regla que la define. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

En este curso estamos interesados en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*.

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un único elemento de B.*

Observa que una función son *tres* cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B donde toma valores y la regla que la define. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

En este curso estamos interesados en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*.

Convenio. En lo que sigue solamente consideraremos funciones reales y, si no se especifica otra cosa, se entiende que $B = \mathbb{R}$.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f*.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase “f evaluada en x” o “el valor de f en x”) el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f* .

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f*.

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f : A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A*.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f* .

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f : A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A*.

Las propiedades de una función dependen de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las define sea la misma.*

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena.

Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f evaluada en x" o "el valor de f en x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f*.

Es muy importante distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).

El símbolo $f : A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A*.

Las propiedades de una función dependen de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las define sea la misma.*

Dos funciones f y g son iguales cuando *tienen igual dominio* y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Consideremos las funciones siguientes.

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x^2$.

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x^2$.

b) $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=x^2$.

c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $h(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ -1, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

d) Sea $f(x)=\dfrac{x^3+8x+6}{x^2-1}$

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Observa que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $e + \pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

Consideremos las funciones siguientes.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Observa que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $\mathrm{e} + \pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

En d) no nos dan explícitamente el dominio de f por lo que se entiende que f está definida siempre que $f(x)$ tenga sentido, es decir, siempre que, $x^2 - 1 \neq 0$, esto es, para $x \neq \pm 1$.

El convenio del dominio. Cuando una función se define por una fórmula "$f(x) = \text{fórmula}$" y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función.

El convenio del dominio. Cuando una función se define por una fórmula "$f(x) = \text{fórmula}$" y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, y un conjunto no vacío $C \subset A$, el conjunto de las imágenes por f de todos los elementos de C:

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

se llama *imagen de C por f*. Cuando $C = A$, el conjunto $f(A)$ se llama *conjunto imagen* de f y también *rango* o *recorrido* de f.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- Se define la *función suma* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- Se define la *función suma* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$.
- Se define la *función producto* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x)g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo fg. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- Se define la *función suma* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$.
- Se define la *función producto* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x)g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo fg. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$.
- Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- Se define la *función suma* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$.
- Se define la *función producto* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x)g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo fg. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$.
- Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$.

- Se define la *función suma* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x) + g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo $f + g$.
- Se define la *función producto* como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $f(x)g(x)$. Dicha función se representa con el símbolo fg. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in A$ el número $\alpha f(x)$.
- Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in A$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa por $\dfrac{f}{g}$.

Cualquiera sean $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ se verifican las propiedades:
Asociativas. $(f + g) + h = f + (g + h)$; $(fg)h = f(gh)$
Conmutativas. $f + g = g + f$; $fg = gf$
Distributiva. $(f + g)h = fh + gh$

Composición de funciones. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

Composición de funciones. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

Funciones inyectivas. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

Composición de funciones. Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de* g *con* f y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.

Funciones inyectivas. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

La función inversa de una función inyectiva. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función en el conjunto $B = f(A)$, $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$, que llamaremos *función inversa de* f, que a cada número $y \in B$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Funciones monótonas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $C \subset A$ un subconjunto no vacío de A.

Se dice que f es ***creciente*** en C, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $C \subset A$ un subconjunto no vacío de A.

Se dice que f es ***creciente*** en C, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que f es ***decreciente*** en C, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $C \subset A$ un subconjunto no vacío de A.

Se dice que f es ***creciente*** en C, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que f es ***decreciente*** en C, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición.

Funciones monótonas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $C \subset A$ un subconjunto no vacío de A.

Se dice que f es ***creciente*** en C, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que f es ***decreciente*** en C, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición.

Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente.

Funciones monótonas

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $C \subset A$ un subconjunto no vacío de A.

Se dice que f es ***creciente*** en C, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que f es ***decreciente*** en C, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio de definición.

Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente.

Una función monótona e inyectiva se dice que es *estrictamente monótona*, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Gráfica de una función. La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.

Gráfica de una función. La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in A\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo como las derivadas.

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Continuidad en un punto

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Observación. Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto. Si no se conoce el valor de una función en un punto no puede comprobarse si la condición anterior se verifica o no en dicho punto y, por ello, no tiene sentido considerar la continuidad de esa función en dicho punto.

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a - \delta < x \leqslant a$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua por la derecha** en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $a \leqslant x < a + \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Una función $f:A\to\mathbb{R}$ se dice que es **continua por la izquierda** en un punto $a\in A$ si, para cada número $\varepsilon>0$, se puede encontrar un número $\delta>0$ tal que para todo $x\in A$ con $a-\delta<x\leqslant a$ se verifica que $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Una función $f:A\to\mathbb{R}$ se dice que es **continua por la derecha** en un punto $a\in A$ si, para cada número $\varepsilon>0$, se puede encontrar un número $\delta>0$ tal que para todo $x\in A$ con $a\leqslant x<a+\delta$ se verifica que $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Se dice que $f:A\to\mathbb{R}$ es continua en un conjunto no vacío $C\subset A$, si f es continua en todo punto de C.

Caracterización de la continuidad por sucesiones

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en a.

b) Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $\lim\{x_n\} = a$, se verifica que $\lim\{f(x_n)\} = f(a)$.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que:

1. Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se verifica que:

1. Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.
2. Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Continuidad de una función compuesta

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es continua en un punto $a \in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a.
En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

Una *función polinómica o polinomio* es una función de la forma:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, supuesto que $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Una *función polinómica o polinomio* es una función de la forma:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, supuesto que $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Una *función racional* es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Como consecuencia de los resultados anteriores y de las propiedades de las funciones logaritmo y exponencial, obtenemos el siguiente resultado.

- Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.

Como consecuencia de los resultados anteriores y de las propiedades de las funciones logaritmo y exponencial, obtenemos el siguiente resultado.

- Toda función racional es continua en su dominio natural de definición.
- Las funciones exponenciales, logaritmos y potencias de exponente real son continuas en sus dominios naturales de definición.

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la “proximidad” de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la “proximidad” de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*. Vamos a precisar este concepto.

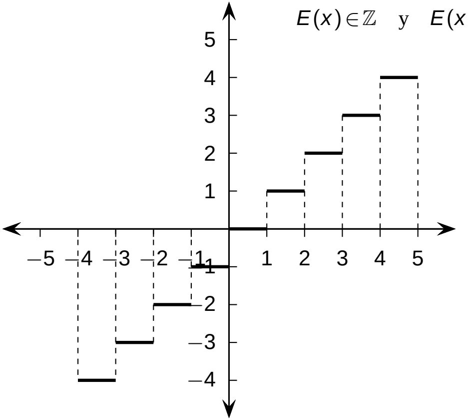
Dados una función $f : A \to \mathbb{R}$ y un conjunto no vacío $C \subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x) = f(x)$ para todo $x \in C$.

Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que una función $g : B \to \mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B \supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Función *parte entera*

La función que a cada número $x \in \mathbb{R}$ asigna *el mayor entero que es menor o igual que x* se llama función *parte entera*. Dicha función se representa con la letra E y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por las condiciones siguientes:

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$



Esta función es discontinua en todos los enteros. Si consideramos la función f, restricción de E a $[1, 2[$, cuyo dominio es el intervalo $[1, 2[$ y que a cada punto de dicho intervalo asigna su "parte entera", $f(x) = E(x)$, para $1 \leqslant x < 2$; entonces f es constante pues, claramente $f(x) = 1$ para todo $x \in [1, 2[$, luego f es continua en todos los puntos de su dominio, en particular f es continua en 1 aunque la función "parte entera" es discontinua en dicho punto.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.
- Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.
- Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.
- Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.
- Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.
- Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.
- Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.
- Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$, se dice que a es un *punto aislado* de A si existe un intervalo abierto I tal que $I \cap A = \{a\}$.

Localización de la continuidad

- Cualquier restricción de una función continua es también continua.
- Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ e I un intervalo ***abierto*** tal que $a \in I$. Supongamos que la restricción de f a $I \cap A$ es continua en a. Entonces f es continua en a.
- Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.
- Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in A$, se dice que a es un *punto aislado* de A si existe un intervalo abierto I tal que $I \cap A = \{a\}$.

Consecuencia del teorema de localización es que *cualquier función es continua en los puntos aislados de su conjunto de definición.*

Conservación local del signo

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. Es decir, $f(x) > 0$ si $f(a) > 0$, o $f(x) < 0$ si $f(a) < 0$, en todo punto $x \in]a - r, a + r[\cap A$.

Teorema de los ceros de Bolzano

Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Teorema del valor intermedio

La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Existencia de raíces. Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Existencia de raíces. Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Ceros de polinomios de grado impar. Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.

Aplicaciones del teorema de Bolzano

Se trata de probar que hay un número real c tal que $f(c) = g(c)$ o, dicho de otra forma, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene soluciones. La forma de proceder para aplicar el teorema de Bolzano es la siguiente.

- Se pasan todos los términos de la ecuación a un lado y se define $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Se comprueba que la función h es continua y está definida en un intervalo I. Unas veces el intervalo donde h está definida debemos elegirlo nosotros de forma adecuada, y otras veces viene impuesto por el enunciado del ejercicio.
- Se comprueba que hay puntos en I donde la función h es negativa y otros en los que h es positiva. Se concluye, por el teorema de Bolzano, que h debe anularse en algún punto de I, que es lo que queríamos probar.

Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.

Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.

Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona.

Una función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.

Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.

La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.

Toda función inyectiva y continua en un intervalo es estrictamente monótona.

La función inversa de una función inyectiva y continua en un intervalo es continua.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)|$ ºleM para todo $x \in B$.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)|$ ºleM para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **máximo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene máximo, es decir, existe algún punto $v \in B$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in B$.

Sea f una función definida en un conjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Se dice que f está **mayorada** o **acotada superiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está mayorado, es decir, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **minorada** o **acotada inferiormente** en B, si el conjunto $f(B)$ está minorado, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f está **acotada** en B si el conjunto $f(B)$ está acotado, es decir, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in B$. Equivalentemente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)|$ º*leM* para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **máximo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene máximo, es decir, existe algún punto $v \in B$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in B$.

Se dice que f alcanza un **mínimo** (absoluto) en B si el conjunto $f(B)$ tiene mínimo, es decir, existe algún punto $u \in B$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in B$.

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.

Teorema de Weierstrass

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.

Una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

En lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

Representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ *sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo* I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

Límite de una función en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.
Equivalen las afirmaciones siguientes:

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

Continuidad y límite funcional

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Límites laterales

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

Límites laterales

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

Supongamos que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \beta$.

Relación entre el límite y los límites laterales

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = L$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales))

Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales))

Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Caracterización del límite por sucesiones

Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Caracterización del límite por sucesiones

Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el dominio de definición de f, tal que $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left|\log(x)\right|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ cualesquiera sean $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1, \quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|\log(x)\right|^{\mu}}{x^{\alpha}}=0$ cualesquiera sean $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.

iii) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\left|\log(x)\right|^{\mu}=0$ cualesquiera sean $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left|\log(x)\right|^{\mu}}{x^{\alpha}}=0$ cualesquiera sean $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.

iii) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\left|\log(x)\right|^{\mu}=0$ cualesquiera sean $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}}=0$ cualesquiera sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\mu>0$.

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

Clasificación de las discontinuidades

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x),\quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\ \lim\limits_{x\to a}g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Álgebra de límites

Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$, $\quad\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\,\lim\limits_{x\to a}g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

iii) Si $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$

iv) Supongamos que $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$ y

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L.$$

Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto

Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, y que hay un número $M>0$ tal que $|g(x)|\leqslant M$ para todo $x\in I$, $x\neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=0$.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

La continuidad permuta con el paso al límite.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

La continuidad permuta con el paso al límite.

Si g es continua en el punto $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(L)$. Simbólicamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x))}$$

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x)(x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, y escribimos $f(x)\sim g(x)(x\to a)$, cuando $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x)(x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Sean f y g funciones asintóticamente equivalentes en un punto $a \in \mathbb{R}$ o bien $a = +\infty$ o $a = -\infty$, y $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se verifica que:

- $\lim_{x \to a} f(x)h(x) = L \iff \lim_{x \to a} g(x)h(x) = L$.

Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x)(x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Sean f y g funciones asintóticamente equivalentes en un punto $a \in \mathbb{R}$ o bien $a = +\infty$ o $a = -\infty$, y $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se verifica que:

- $\lim_{x \to a} f(x)h(x) = L \iff \lim_{x \to a} g(x)h(x) = L$.
- $\lim_{x \to a} f(x)h(x) = +\infty \iff \lim_{x \to a} g(x)h(x) = +\infty$.

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, \, x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I, \, x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

Límites de una función monótona

Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Discontinuidades de las funciones monótonas

Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

Discontinuidades de las funciones monótonas

Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log L$.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{L}$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \iff \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = \log L$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to a} \log f(x) = +\infty$.

Límites de exponenciales y logaritmos

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = e^{L}$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0 \iff \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = \log L$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x \to a} \log f(x) = -\infty$.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\log x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0 \text{ para todos } \alpha > 0 \text{ y } \mu\in\mathbb{R}.$$

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\log x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- Las potencias positivas decrecen hacia 0 más rápidamente que los logaritmos.
  $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big| \log |x| \big|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Escala de infinitos

- Las potencias positivas crecen más rápidamente que los logaritmos.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\log x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- Las potencias positivas decrecen hacia 0 más rápidamente que los logaritmos.
  $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big| \log |x| \big|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- Las exponenciales positivas crecen más rápidamente que las potencias.
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu > 0$.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

El siguiente resultado permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Criterio de equivalencia logarítmica. Sea $a \in I$, f y g funciones definidas en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que $f(x) > 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, y que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x) - 1) = L$.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

El siguiente resultado permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

Criterio de equivalencia logarítmica. Sea $a \in I$, f y g funciones definidas en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que $f(x) > 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, y que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1) = L$.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty$.

Indeterminaciones en el cálculo de límites

El siguiente resultado permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Criterio de equivalencia logarítmica. Sea $a \in I$, f y g funciones definidas en $I \setminus \{a\}$. Supongamos que $f(x) > 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, y que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:

i) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$ si, y sólo si, $\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L$.

ii) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ si, y sólo si, $\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty$.

iii) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$ si, y sólo si, $\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty$.