Series

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

January 22, 2014

Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \dots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$.

Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$.

La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general a_n* o *serie definida por la sucesión $\{a_n\}$*, y la representaremos por $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden n* de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***.

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "acotada", "convergente" o "positivamente divergente".

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*.

Naturalmente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

La igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - S \right| < \varepsilon$.

Serie geométrica

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$.

Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$.

Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$.

Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

Serie armónica

La serie de término general $1/n$, es decir, la sucesión $\{H_n\}$ donde $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, que simbólicamente representamos por $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, se llama **serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2.$$

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando ***consecutivamente*** los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \ldots\ldots\right\}$$

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando ***consecutivamente*** los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots\dots\right\}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots\dots\right\},$$

cuya serie asociada, obtenida sumando ***consecutivamente*** sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1\\
S_2 &= 1-\frac{1}{2}\\
S_3 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\
S_4 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\\
S_5 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\
S_6 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots\\
S_9 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots\\
S_{3n} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{4j-2}-\frac{1}{4j}\right)
\end{aligned}
$$

Tenemos que:

$$S_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2}\log 2$. Es claro que $\lim\{S_{3n} - S_{3n-1}\} = \lim\{S_{3n} - S_{3n-2}\} = 0$ de donde se sigue que:

$$\lim\{S_n\} = \frac{1}{2}\log 2.$$

La particularidad del estudio de las series

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: **se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$.** Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión $\{a_n\}$ es el dato que podemos utilizar*.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant q + 1$ es $a_n = b_n$. Entonces se verifica que las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^{q} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^{q} b_j .$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Condición necesaria para la convergencia de una serie

Para que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Esta condición necesaria no es suficiente.

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*.

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*.

Una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

Criterio básico de convergencia para series de términos positivos

Una serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$. Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

Criterio básico de comparación

Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación

Sean $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación

Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio límite de comparación

Sean $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Criterio límite de comparación

Sean $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Criterio límite de comparación

Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

En particular, **si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son asintóticamente equivalentes, las respectivas series, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ambas convergen o ambas divergen.**

Criterio integral

Sea $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ una función **positiva y decreciente.** Entonces se verifica que

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

En consecuencia, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ y la integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ambas convergen o ambas divergen.

Series de Riemann

Dado un número real α, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Series de Riemann

Dado un número real α, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Series de Bertrand

La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ cualquiera sea β, y también si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. En cualquier otro caso es divergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente y además $\{a_n\}$ no converge a 0.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente y además $\{a_n\}$ no converge a 0.
- Si $L = 1$ el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

Ejercicio.

Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ donde $x\in\mathbb{R}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\} .$$

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente y $\{a_n\}$ no converge a 0.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente y $\{a_n\}$ no converge a 0.
- Si $L = 1$ el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

Ejercicio

Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$.

Criterio de Raabe (1832)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

- Si $L>1$ o $L=+\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio de Raabe (1832)

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

- Si $L>1$ o $L=+\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L<1$ o $L=-\infty$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Sea $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

- Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Sea $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

- Si $S_n \to e^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $S_n \to e^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente** si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente** si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente.

Además, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.

Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.

Con más precisión:

Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Entonces existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

Teorema de Riemann: Si una serie no es absolutamente convergente entonces no es conmutativamente convergente.

Con más precisión:

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Entonces existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

Convergencia absoluta $\Longleftrightarrow$ **Convergencia conmutativa**

Criterio de Leibniz para series alternadas

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

Además, si $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.

Ejercicio

Estudia, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie:

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^{\alpha}$$

Series de potencias

Dadas una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a\in\mathbb{R}$, se llama **serie de potencias** centrada en a a la sucesión

$$\{c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n\}$$

en la cual x representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n.$$

Series de potencias

Dadas una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a\in\mathbb{R}$, se llama **serie de potencias** centrada en a a la sucesión

$$\{c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n\}$$

en la cual x representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n.$$

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a.

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, sea $\lambda = \lim \sqrt[n]{|c_n|}$ y definamos:

$$R = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda = +\infty\,; \\ \dfrac{1}{\lambda}\,, & \text{si } 0 < \lambda < +\infty\,; \\ +\infty\,, & \text{si } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, sea $\lambda = \lim \sqrt[n]{|c_n|}$ y definamos:

$$R = \begin{cases} 0\,, & \text{si } \lambda = +\infty\,; \\ \dfrac{1}{\lambda}\,, & \text{si } 0 < \lambda < +\infty\,; \\ +\infty\,, & \text{si } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

Entonces, si $R = 0$ la serie converge sólo para $x = a$; si $0 < R < +\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < R$ y no converge para $|x-a| > R$; y si $R = +\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Con las notaciones del teorema anterior, el número R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si $R = 0$.

Con las notaciones del teorema anterior, el número R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si $R = 0$.

Para una serie de potencias no trivial, centrada en un punto a, el intervalo $I =]a - R, a + R[$, si $0 < R < +\infty$, o bien la totalidad de $\mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$, cuando $R = +\infty$, se llama **intervalo de convergencia** de la serie; y la función $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ para todo $x \in I$, se llama **función suma** de la serie.

Dada una serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$, supongamos que $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to \lambda \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces el radio de convergencia R viene dado por $R = 1/\lambda$, cuando $0 < \lambda < +\infty$, $R = 0$ si $\lambda = +\infty$ y $R = +\infty$ si $\lambda = 0$.

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f: I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- f es indefinidamente derivable en I.

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- f es indefinidamente derivable en I.
- La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- f es indefinidamente derivable en I.
- La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- f es indefinidamente derivable en I.
- La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

En particular, se verifica que $f^{(k}(a) = c_k \cdot k!$, es decir, $c_k = \dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$ y, por tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.

Dada una función f con derivadas de todos órdenes en un intervalo I y un punto $a \in I$, ¿se verifica que la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de f coincide con f?

Series de Taylor de la función exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que:

$$e^x = e^a\, e^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Series de Taylor del seno y del coseno

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Por el teorema de derivación para series de potencias obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $a = 0$ tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

La serie de Taylor del logaritmo centrada en $a > 0$ se deduce de lo anterior:

$$\log(x) = \log(a + (x-a)) = \log a + \log\left(\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1}$$

Serie de Taylor del arcotangente en cero

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in]-1,1[)$$