Continuidad y límite funcional. Derivadas

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Continuidad en un punto

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Continuidad en un punto

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \;:\quad \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x \leqslant a$ (resp. por $a \leqslant x < a + \delta$), se dice que f es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Continuidad en un punto

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \quad \left. \begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in A \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x \leqslant a$ (resp. por $a \leqslant x < a+\delta$), se dice que f es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Observaciones. • Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.

Continuidad en un punto

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x \leqslant a$ (resp. por $a \leqslant x < a + \delta$), se dice que f es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Observaciones. • Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.
• En la definición de continuidad el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Continuidad en un punto

Una función, $f:A\to\mathbb{R}$, definida en un conjunto $A\subset\mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a\in A$ cuando se verifica que:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}^+\ :\ \left.\begin{array}{c} a-\delta<x<a+\delta \\ x\in A \end{array}\right\}\Longrightarrow\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta<x<a+\delta$ por $a-\delta<x\leqslant a$ (resp. por $a\leqslant x<a+\delta$), se dice que f es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Observaciones. • Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.
• En la definición de continuidad el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Se dice que f es continua en A, si f es continua en todo punto de A.

Propiedades de las funciones continuas

Propiedades de las funciones continuas

• *Las funciones suma y producto y cociente de funciones continuas son funciones continuas.*

Propiedades de las funciones continuas

• *Las funciones suma y producto y cociente de funciones continuas son funciones continuas.*

• *La composición de funciones continuas es una función continua.*

Propiedades de las funciones continuas

• *Las funciones suma y producto y cociente de funciones continuas son funciones continuas.*

• *La composición de funciones continuas es una función continua.*

• *Todas las funciones elementales son continuas en sus dominios naturales de definición.*

Teorema de Bolzano. *Toda función* ***continua*** *en un* ***intervalo*** *que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.*

Teorema de Bolzano. *Toda función* ***continua*** *en un* ***intervalo*** *que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, $a < b$ son dos puntos de I y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay algún punto $c \in]a, b[$ en el que f se anula, $f(c) = 0$.

Teorema de Bolzano. *Toda función **continua** en un **intervalo** que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, $a < b$ son dos puntos de I y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay algún punto $c \in]a, b[$ en el que f se anula, $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio. *El rango o recorrido de una función **continua** en un **intervalo** es un intervalo.*

Teorema de Bolzano. *Toda función **continua** en un **intervalo** que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, $a < b$ son dos puntos de I y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay algún punto $c \in]a,b[$ en el que f se anula, $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio. *El rango o recorrido de una función **continua** en un **intervalo** es un intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, entonces $J = f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo.

Teorema de Bolzano. *Toda función* ***continua*** *en un* ***intervalo*** *que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, $a < b$ son dos puntos de I y $f(a)f(b) < 0$, entonces hay algún punto $c \in]a, b[$ en el que f se anula, $f(c) = 0$.

Teorema del valor intermedio. *El rango o recorrido de una función* ***continua*** *en un* ***intervalo*** *es un intervalo.* Es decir, si f es una función continua definida en un intervalo I, entonces $J = f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo.

Una consecuencia del teorema de Bolzano es que *toda función polinómica de grado impar con coeficientes reales tiene alguna raíz real.*

Extremos absolutos

Extremos absolutos

- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.

Extremos absolutos

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Extremos absolutos

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.

• Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema de existencia de extremos absolutos (Weierstrass).

Extremos absolutos

• Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.

• Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema de existencia de extremos absolutos (Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo* ***cerrado y acotado*** *alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Extremos absolutos

- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.
- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema de existencia de extremos absolutos (Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo **cerrado y acotado** alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Equivalentemente, el recorrido de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, es también un intervalo cerrado y acotado: $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.

Extremos absolutos

- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.
- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema de existencia de extremos absolutos (Weierstrass). *Toda función continua en un intervalo **cerrado y acotado** alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Equivalentemente, el recorrido de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, es también un intervalo cerrado y acotado: $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es que *una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733,$

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985,$

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985, f(0.02) = 0.999933,$

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985, f(0.02) = 0.999933, f(0.01) = 0.999983$

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985, f(0.02) = 0.999933, f(0.01) = 0.999983$

y comprobamos que cuanto más nos acercamos al valor $x = 0$, el valor de la función se acerca cada vez más a 1.

Idea intuitiva de límite de una función en un punto.

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$f(0.04) = 0.999733, f(0.03) = 0.99985, f(0.02) = 0.999933, f(0.01) = 0.999983$

y comprobamos que cuanto más nos acercamos al valor $x = 0$, el valor de la función se acerca cada vez más a 1.Esto lo expresamos matemáticamente de la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Límite de una función en un punto.

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$.

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$),

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a\in I$, y f una función que suponemos definida en $I\setminus\{a\}$.Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\quad\exists\delta\in\mathbb{R}^+ : \left.\begin{array}{c} a-\delta<x<a+\delta \\ x\in I,\ x\neq a \end{array}\right\}\Longrightarrow\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta<x<a+\delta$ por $a-\delta<x<a$ (resp. por $a<x<a+\delta$),se dice que f tiene **límite por la izquierda**

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$),se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**)

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$), se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$.Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$),se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a\in I$, y f una función que suponemos definida en $I\setminus\{a\}$.Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \quad \exists\delta\in\mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta<x<a+\delta \\ x\in I,\ x\neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta<x<a+\delta$ por $a-\delta<x<a$ (resp. por $a<x<a+\delta$),se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=L$(resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=L$).

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$), se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a. Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$).

Relación entre límite y continuidad.

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left. \begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I, \ x \neq a \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en a** y escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$), se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a. Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$).

Relación entre límite y continuidad. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Se verifica que f es continua (por la derecha, por la izquierda) en a si, y sólo si, f tiene límite (por la derecha, por la izquierda) en a y dicho límite es igual a $f(a)$.

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales).

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I, \; x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$),

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I, \; x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$),se dice que f es **positivamente divergente por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x < a$ (resp. por $a < x < a+\delta$),se dice que f es **positivamente divergente por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.Y simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ (resp.

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior cambiamos $+\infty$ por $-\infty$ entonces tenemos las definiciones de **negativamente divergente** en a que se expresan simbólicamente por

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = -\infty$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales).

Límites en infinito (asíntotas horizontales). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

Límites en infinito (asíntotas horizontales). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Límites en infinito (asíntotas horizontales). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left. \begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en** $+\infty$, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I = [c, +\infty[$. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Álgebra de límites.

Álgebra de límites. Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x), \quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Álgebra de límites. Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$

Álgebra de límites. Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, $\quad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$

Funciones asintóticamente equivalentes.

Funciones asintóticamente equivalentes. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Funciones asintóticamente equivalentes. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de dos funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Funciones asintóticamente equivalentes. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x)(x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de dos funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional
Sea $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce que $P(x) \sim c_n x^n$ para $x \to \pm\infty$.

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional

Sea $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n}=c_n+\frac{c_{n-1}}{x}+\frac{c_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{c_1}{x^{n-1}}+\frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce que $P(x)\sim c_nx^n$ para $x\to\pm\infty$.

Sea $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ otra función polinómica. Tenemos que

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\sim\frac{c_nx^n}{b_mx^m}=\frac{c_n}{b_m}x^{n-m}\quad(x\to\pm\infty)$$

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional

Sea $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce que $P(x) \sim c_n x^n$ para $x \to \pm\infty$.

Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ otra función polinómica. Tenemos que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \quad (x \to \pm\infty)$$

Suponiendo que $\frac{c_n}{b_m} > 0$, deducimos que:

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional

Sea $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce que $P(x) \sim c_n x^n$ para $x \to \pm\infty$.

Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ otra función polinómica. Tenemos que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \quad (x \to \pm\infty)$$

Suponiendo que $\frac{c_n}{b_m} > 0$, deducimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n>m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n>m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n=m \\ 0, & m>n \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n>m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n=m \\ 0, & m>n \end{cases}$$

Escala de infinitos

Escala de infinitos

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Escala de infinitos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha}\left|\ln x\right|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Escala de infinitos

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{\mu}}{x^{\alpha}}=0$ para todos $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha}\left|\ln x\right|^{\mu}=0$ para todos $\alpha>0$ y $\mu\in\mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\mu x}}=0$ para todos $\alpha>0$ y $\mu>0$.

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^{∞}” y “0∞”.

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty}$$

Derivadas

Velocidad instantánea.

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de “velocidad instantánea”, $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* t_0.

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de "velocidad instantánea", $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* t_0.Se trata de un concepto teórico de gran utilidad para estudiar el movimiento, pero no puede medirse porque un instante no tiene duración.

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de "velocidad instantánea", $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* t_0.Se trata de un concepto teórico de gran utilidad para estudiar el movimiento, pero no puede medirse porque un instante no tiene duración.Su formulación matemática es

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Derivadas

Velocidad instantánea.

Consideremos un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$.La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de "velocidad instantánea", $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* t_0.Se trata de un concepto teórico de gran utilidad para estudiar el movimiento, pero no puede medirse porque un instante no tiene duración.Su formulación matemática es

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

Observa que el cociente $\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ no está definido para $t=t_0$.

Secantes y tangentes.

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Secantes y tangentes.

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.

Secantes y tangentes.

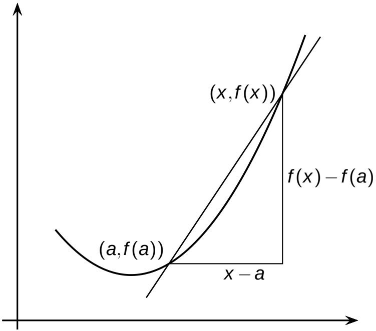
Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.

Secantes y tangentes.

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.

Secantes y tangentes.

Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto.Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente.La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.



Secantes y tangentes.

Consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f.

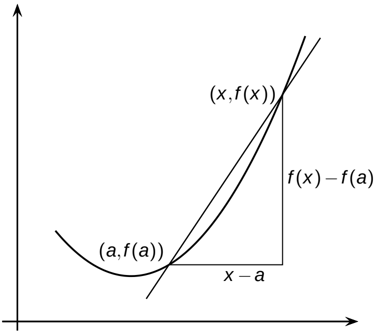
Secantes y tangentes.

Consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f.Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el punto x se aproxima *"infinitamente"* al punto a, la **pendiente de la tangente** vendrá dada por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$.

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$.

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de f en a** y lo representaremos por $f'(a)$.

El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.

Rectas tangente y normal

Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Rectas tangente y normal

Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$

es la **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta normal a f en $x = a$

Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables y $g(a) \neq 0$, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a); \quad (fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables y $g(a)\neq 0$, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Las funciones elementales son derivables en todo punto de su dominio natural de definición.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

$$(u \circ v \circ w)'(x) = u'(v(w(x))v'(w(x))w'(x)$$

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.

Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*. La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.

Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*. La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Condición necesaria de extremo relativo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que el máximo relativo es *estricto*.

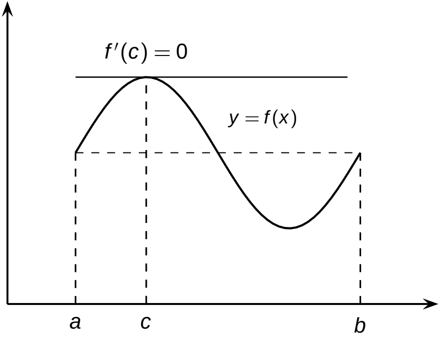
Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*. La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Condición necesaria de extremo relativo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** de dicha función.

Teorema de Rolle

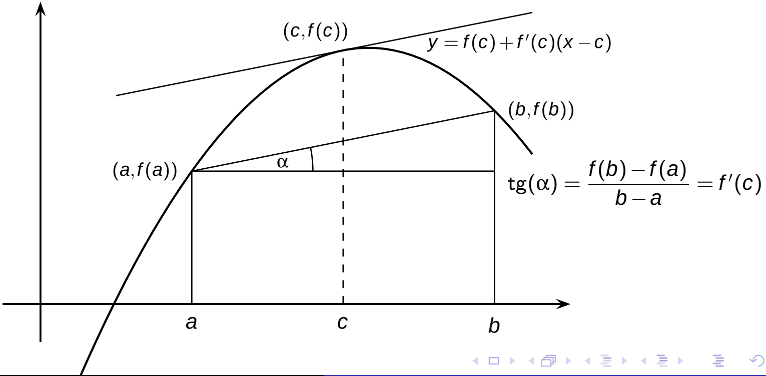
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Se verifica entonces que:

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Se verifica entonces que:

- Si para todo $x \in]a, b[$ es $f'(x) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Se verifica entonces que:

- Si para todo $x \in]a,b[$ es $f'(x) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
- Si para todo $x \in]a,b[$ es $f'(x) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función **derivable en un intervalo I**, **cuya derivada se anula en I en un único punto** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, b \in I$ tales que $a < c < b$. Entonces se verifica que

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función **derivable en un intervalo** I, **cuya derivada se anula en** I **en un único punto** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, b \in I$ tales que $a < c < b$. Entonces se verifica que

- Si $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$, f alcanza en c un mínimo absoluto estricto en I.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función **derivable en un intervalo I, cuya derivada se anula en I en un único punto** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, b \in I$ tales que $a < c < b$. Entonces se verifica que

- Si $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$, f alcanza en c un mínimo absoluto estricto en I.
- Si $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0$, f alcanza en c un máximo absoluto estricto en I.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas “inversas”.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas “inversas”.

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además
$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I.

Por convenio se define $f^{(0} = f$.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo **relativo** estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo **relativo** estricto* en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f: I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo **relativo** estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo **relativo** estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo* ***relativo*** *estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero ***no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto***.

Polinomios de Taylor

Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a.**

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de a, x, n y $\varepsilon > 0$, podemos probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de a, x, n y $\varepsilon > 0$, podemos probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

Entonces podemos asegurar que $|f(x) - T_n(f,a)(x)| < \varepsilon$, es decir, el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε.

Funciones convexas y funciones cóncavas

Se dice que una función es **convexa** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por encima de la gráfica de f.

Funciones convexas y funciones cóncavas

Se dice que una función es **convexa** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por encima de la gráfica de f.

Se dice que una función es **cóncava** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por debajo de la gráfica de f.

Funciones convexas y funciones cóncavas

Se dice que una función es **convexa** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por encima de la gráfica de f.

Se dice que una función es **cóncava** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por debajo de la gráfica de f.

Ejemplos típicos de funciones convexas son las parábolas “hacia arriba” y la exponencial. Ejemplos típicos de funciones cóncavas son las parábolas “hacia abajo” y el logaritmo.

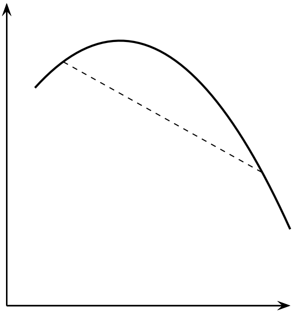


Figure. Función cóncava

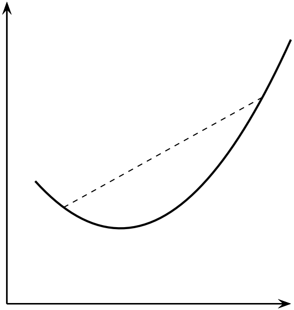


Figure. Función convexa

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a,b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a, b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.

En particular si f es dos veces derivable en $]a, b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a, b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a, b]$.

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a,b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

En particular si f es dos veces derivable en $]a,b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a,b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Si f es tres veces derivable en un punto a y se tiene que $f''(a) = 0$ pero $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.