Funciones Reales

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, $\emptyset$, se considera también como un intervalo.

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado y acotado)}$$

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\ ]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(intervalo abierto)} \end{aligned}$$

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado y acotado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}
\end{array}
$$

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números reales comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y de Ø, los intervalos de números reales son los conjuntos que se describen a continuación.

Intervalos acotados que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} && \text{(intervalo cerrado y acotado)}\\
]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$]-\infty, c[\quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \quad \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{array}{rcll}
]-\infty, c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty, c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}
\end{array}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{aligned}
]-\infty, c[\quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \quad \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty, c] \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} \quad \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\
]c, +\infty[\quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : x > c\} \quad \text{(semirrecta abierta a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos no acotados que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{rcll}]-\infty, c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\ ]-\infty, c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\ ]c, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x > c\} & \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \\ [c, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la derecha)} \end{array}$$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz.$
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z$.
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0.$

Reglas para trabajar con desigualdades

- $x < y \iff x + z < y + z.$
- Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz.$
- Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz.$
- $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$.
- $z > 0 \iff \dfrac{1}{z} > 0.$
- Si $xy > 0$ entonces $x < y \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}.$

valor absoluto

El valor absoluto de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \max\{-x, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.
ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.
iii) $|xy| = |x||y|$.
iv) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.
v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.
vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.
ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.
iii) $|xy| = |x||y|$.
iv) $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.
v) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.
vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Propiedades del valor absoluto

i) $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$, y $|x| > 0$ si $x \neq 0$.

ii) $|x| = |-x|$ y $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

iii) $|xy| = |x||y|$.

iv) $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.

v) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

vi) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

Notación

Representaremos por $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, es decir $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$. Representaremos por $\mathbb{R}^-$ los números reales negativos, es decir, $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$. Observa que el 0 no es positivo ni negativo.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B.*

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \to B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.

Concepto de función

Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B.*Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

para indicar que f es una función definida en A con valores en B.
El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.
Dos funciones pueden estar definidas por la misma regla, pero si tienen distintos dominios no pueden considerarse iguales.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.
Dos funciones pueden estar definidas por la misma regla, pero si tienen distintos dominios no pueden considerarse iguales.Por ejemplo, las funciones $f :] -1, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes. Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.
Dos funciones pueden estar definidas por la misma regla, pero si tienen distintos dominios no pueden considerarse iguales.Por ejemplo, las funciones $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes. Aunque la regla que las define es la misma "a un número se le hace corresponder su cuadrado", su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos:

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.
Dos funciones pueden estar definidas por la misma regla, pero si tienen distintos dominios no pueden considerarse iguales.Por ejemplo, las funciones $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes. Aunque la regla que las define es la misma “a un número se le hace corresponder su cuadrado”, su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos:la función f no es monótona mientras que la función g es estrictamente creciente.

Las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que toman valores reales se llaman *funciones reales*. Son las que vamos a considerar en todo lo que sigue.
Simbólicamente escribiremos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.
Para cada $x \in A$ representamos por $f(x)$ el número que se obtiene evaluando f en x.
Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.
Dos funciones pueden estar definidas por la misma regla, pero si tienen distintos dominios no pueden considerarse iguales.Por ejemplo, las funciones $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ y $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$, son funciones diferentes. Aunque la regla que las define es la misma "a un número se le hace corresponder su cuadrado", su dominio es diferente.Estas funciones tienen distintos comportamientos:la función f no es monótona mientras que la función g es estrictamente creciente.La función f no alcanza un valor máximo y g alcanza un máximo en 1.

El convenio del dominio

Cuando una función se define mediante una fórmula:

$$\boxed{f(x) = \text{fórmula}}$$

y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real.

El convenio del dominio

Cuando una función se define mediante una fórmula:

$$\boxed{f(x) = \text{fórmula}}$$

y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado ***dominio natural*** de la función.

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$.

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$.

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la* ***imagen*** de f.

Imagen o recorrido de una función

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$.

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}$$

El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la* ***imagen*** de f.
Calcular el conjunto imagen de una función, es decir, todos los valores que dicha función toma, no es en general fácil de hacer. Se necesitan herramientas de Cálculo que veremos muy pronto.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
La suma y el producto de funciones tienen las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas.

Suma y producto de funciones

Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Se define la *función producto*: $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

La suma y el producto de funciones tienen las propiedades asociativas, conmutativas y distributivas.

Supuesto que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$ se define la *función cociente* $\dfrac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Composición de funciones

Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones verificando que $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h : A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$.Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$.Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.
Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ que llamaremos ***función inversa*** de f, que a cada número $y \in f(A)$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Funciones inyectivas. Función inversa

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$.Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.
Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ que llamaremos ***función inversa*** de f, que a cada número $y \in f(A)$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$.Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(A)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.
Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Funciones monótonas

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **creciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *conserva* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$.

Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **decreciente** en un conjunto $C \subseteq A$, si f *invierte* el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \geqslant f(y)$.

Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es ***estrictamente monótona***, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Gráfica de una función

La gráfica de una función, $f : A \to \mathbb{R}$, es el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Gráfica de una función

La gráfica de una función, $f : A \to \mathbb{R}$, es el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.

Gráfica de una función

La gráfica de una función, $f : A \to \mathbb{R}$, es el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.
La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo como las derivadas.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; el número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se llama grado del polinomio.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; el número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se llama grado del polinomio.Un número α se dice que es una **raíz** o un **cero** del polinomio P si $P(\alpha) = 0$. En tal caso se verifica que $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$, donde Q_1 es un polinomio de un grado menor que P.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; el número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se llama grado del polinomio.Un número α se dice que es una **raíz** o un **cero** del polinomio P si $P(\alpha) = 0$. En tal caso se verifica que $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$, donde Q_1 es un polinomio de un grado menor que P.Puede suceder que α también sea una raíz de Q_1, en cuyo caso se dice que α es una raíz doble de P, y podemos escribir $P(x) = (x - \alpha)^2 Q_2(x)$.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; el número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se llama grado del polinomio.Un número α se dice que es una **raíz** o un **cero** del polinomio P si $P(\alpha) = 0$. En tal caso se verifica que $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$, donde Q_1 es un polinomio de un grado menor que P.Puede suceder que α también sea una raíz de Q_1, en cuyo caso se dice que α es una raíz doble de P, y podemos escribir $P(x) = (x - \alpha)^2 Q_2(x)$.En general, si se verifica que $P(x) = (x - \alpha)^k Q_k(x)$, donde Q_k es un polinomio tal que $Q_k(\alpha) \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}$, se dice que α es una **raíz de orden** k de P.

Las **funciones elementales** son las que pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; el número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se llama grado del polinomio.Un número α se dice que es una **raíz** o un **cero** del polinomio P si $P(\alpha) = 0$. En tal caso se verifica que $P(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$, donde Q_1 es un polinomio de un grado menor que P.Puede suceder que α también sea una raíz de Q_1, en cuyo caso se dice que α es una raíz doble de P, y podemos escribir $P(x) = (x - \alpha)^2 Q_2(x)$.En general, si se verifica que $P(x) = (x - \alpha)^k Q_k(x)$, donde Q_k es un polinomio tal que $Q_k(\alpha) \neq 0$ y $k \in \mathbb{N}$, se dice que α es una **raíz de orden** k de P.Las raíces de orden 1 se dice que son **raíces simples**, y las de orden $k > 1$ se llaman **raíces múltiples**.
Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Funciones racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son funciones polinómicas y Q no es el polinomio constante igual a 0.

Funciones racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son funciones polinómicas y Q no es el polinomio constante igual a 0.
La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ el cual es, en general, unión de un número finito de intervalos.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.
Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.
Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.
La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.
Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.
La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.
Si $x < 0$ y k es ***impar*** se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

Raíces y potencias racionales

Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.
Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\sqrt[k]{y}$.
La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $x < y \iff \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.
Si $x < 0$ y k es ***impar*** se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.
Si r es un número racional, $r = \dfrac{p}{q}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos para todo $x > 0$:

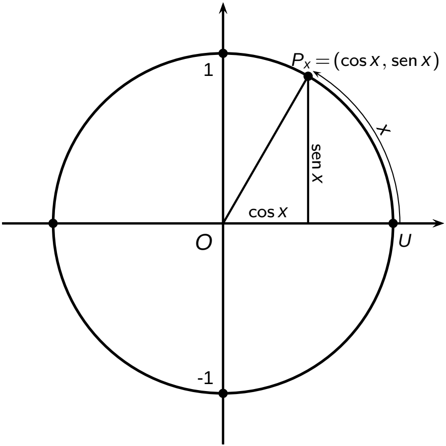
$$\boxed{x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}}$$

Funciones trigonométricas

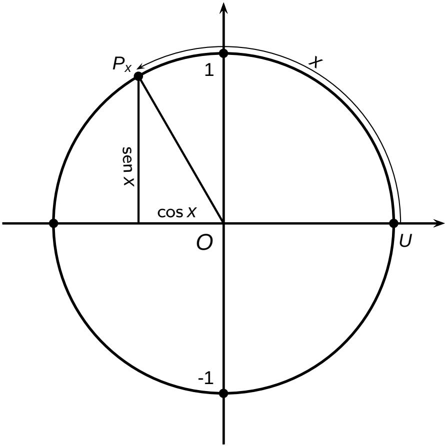
Dado un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant x < 2\pi$ se definen los números $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por la condición de que $P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ es el único punto de la circunferencia unidad tal que la longitud del arco $\widehat{UP_x}$ es igual a x. Es decir, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son el seno y el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x.

Funciones trigonométricas

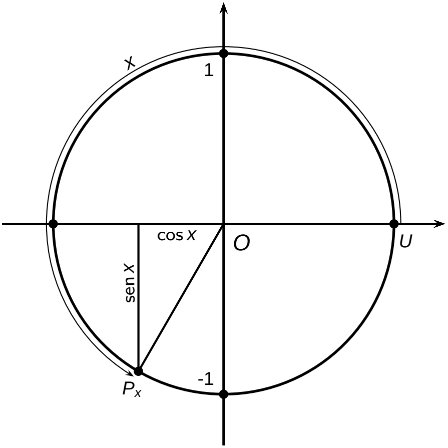
Dado un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant x < 2\pi$ se definen los números $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por la condición de que $P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ es el único punto de la circunferencia unidad tal que la longitud del arco $\widehat{UP_x}$ es igual a x. Es decir, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son el seno y el coseno del ángulo cuya medida en radianes es x.



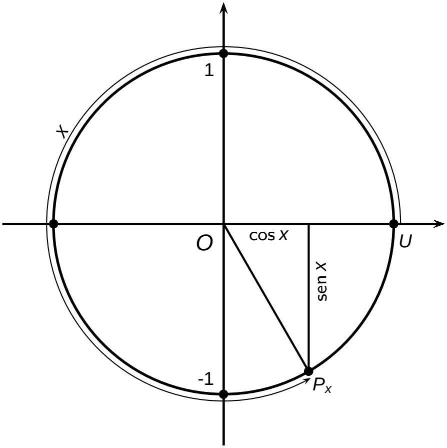
$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$



$\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$



$\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$ se verifica que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ y $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$ se verifica que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ y $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Dado $x \in \mathbb{R}$ representemos por $E(x)$ la parte entera de x, es decir $E(x)$ es el único número entero que verifica que $0 \leqslant x - E(x) < 1$. Es claro que si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $E(x + k) = E(x) + k$, y si $x \notin \mathbb{Z}$ se tiene que $E(-x) = -E(x) - 1$.

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$ se verifica que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ y $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Dado $x \in \mathbb{R}$ representemos por $E(x)$ la parte entera de x, es decir $E(x)$ es el único número entero que verifica que $0 \leqslant x - E(x) < 1$. Es claro que si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $E(x+k) = E(x) + k$, y si $x \notin \mathbb{Z}$ se tiene que $E(-x) = -E(x) - 1$.

Para $x \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $0 \leqslant x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right) < 2\pi$, definimos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right), \quad \cos x = \cos\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$$

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$ se verifica que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ y $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Dado $x \in \mathbb{R}$ representemos por $E(x)$ la parte entera de x, es decir $E(x)$ es el único número entero que verifica que $0 \leqslant x - E(x) < 1$. Es claro que si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $E(x+k) = E(x) + k$, y si $x \notin \mathbb{Z}$ se tiene que $E(-x) = -E(x) - 1$.

Para $x \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $0 \leqslant x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right) < 2\pi$, definimos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right), \quad \cos x = \cos\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$$

Es fácil comprobar que las funciones así definidas son periódicas de período 2π, es decir, se verifica que

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa que si $0 \leqslant x < 2\pi$ se verifica que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ y $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Dado $x \in \mathbb{R}$ representemos por $E(x)$ la parte entera de x, es decir $E(x)$ es el único número entero que verifica que $0 \leqslant x - E(x) < 1$. Es claro que si $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $E(x+k) = E(x) + k$, y si $x \notin \mathbb{Z}$ se tiene que $E(-x) = -E(x) - 1$.

Para $x \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $0 \leqslant x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right) < 2\pi$, definimos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right), \quad \cos x = \cos\left(x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right)$$

Es fácil comprobar que las funciones así definidas son periódicas de período 2π, es decir, se verifica que

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Claro está, para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

La función seno es una función impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y la función coseno es par $\cos(-x) = \cos x$.

La función seno es una función impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y la función coseno es par $\cos(-x) = \cos x$.

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, hemos definido $\operatorname{sen} x$ como el seno del ángulo cuya medida en radianes es x; ¿cómo podemos interpretar $\operatorname{sen} x$ cuando $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$?

La función seno es una función impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y la función coseno es par $\cos(-x) = \cos x$.

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, hemos definido $\operatorname{sen} x$ como el seno del ángulo cuya medida en radianes es x; ¿cómo podemos interpretar $\operatorname{sen} x$ cuando $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$?

Al igual que en el eje de abscisas representamos los números positivos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda, en la circunferencia unidad el punto $U = (1, 0)$ hace el papel del origen, y *las longitudes de arcos en el sentido contrario a las agujas del reloj se consideran positivas*, mientras que *las longitudes de arcos en el sentido del reloj se consideran negativas*.

La función seno es una función impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y la función coseno es par $\cos(-x) = \cos x$.

Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, hemos definido $\operatorname{sen} x$ como el seno del ángulo cuya medida en radianes es x; ¿cómo podemos interpretar $\operatorname{sen} x$ cuando $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$?

Al igual que en el eje de abscisas representamos los números positivos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda, en la circunferencia unidad el punto $U = (1, 0)$ hace el papel del origen, y *las longitudes de arcos en el sentido contrario a las agujas del reloj se consideran positivas*, mientras que *las longitudes de arcos en el sentido del reloj se consideran negativas*.

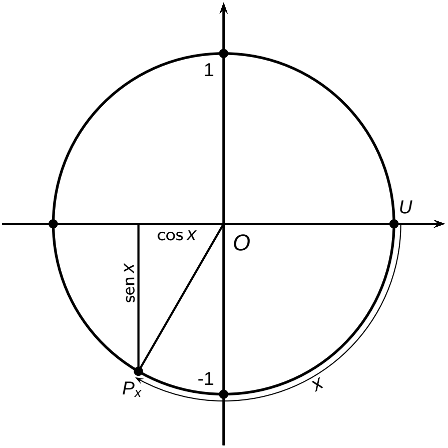
Los ángulos en la mitad inferior de la circunferencia unidad suelen medirse en el sentido de las agujas del reloj y, por tanto, sus medidas están comprendidas entre $-\pi$ y 0.

La función seno es una función impar $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y la función coseno es par $\cos(-x) = \cos x$.

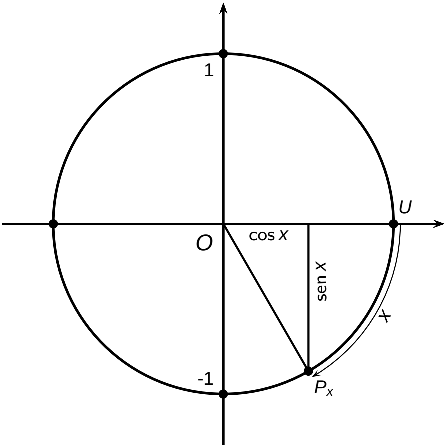
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, hemos definido $\operatorname{sen} x$ como el seno del ángulo cuya medida en radianes es x; ¿cómo podemos interpretar $\operatorname{sen} x$ cuando $-2\pi \leqslant x \leqslant 0$?

Al igual que en el eje de abscisas representamos los números positivos a la derecha del cero y los negativos a su izquierda, en la circunferencia unidad el punto $U = (1, 0)$ hace el papel del origen, y *las longitudes de arcos en el sentido contrario a las agujas del reloj se consideran positivas*, mientras que *las longitudes de arcos en el sentido del reloj se consideran negativas*.

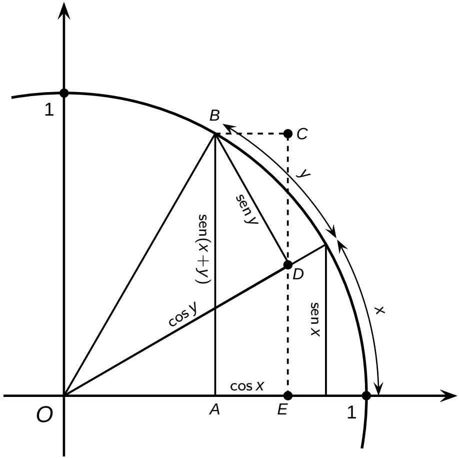
Los ángulos en la mitad inferior de la circunferencia unidad suelen medirse en el sentido de las agujas del reloj y, por tanto, sus medidas están comprendidas entre $-\pi$ y 0.De esta forma a cada punto de la circunferencia unidad le podemos asociar un único número en el intervalo $]-\pi, \pi]$.



$$-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$$



$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$$


1
B
C
y
sen y
sen(x+y)
D
cos y
sen x
x
cos x
O
A
E
1

En la figura anterior se han representado en la circunferencia unidad dos ángulos con medidas en radianes x e y, uno a continuación del otro. Observa que $\operatorname{sen}(x+y) = \overline{ED} + \overline{DC}$ y

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{ED}}{\cos y} \Longrightarrow \overline{ED} = \operatorname{sen} x \cos y$$

En la figura anterior se han representado en la circunferencia unidad dos ángulos con medidas en radianes x e y, uno a continuación del otro. Observa que $\operatorname{sen}(x+y) = \overline{ED} + \overline{DC}$ y

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{ED}}{\cos y} \Longrightarrow \overline{ED} = \operatorname{sen} x \cos y$$

Observa que los ángulos $\widehat{ODE}$ y $\widehat{DBC}$ son iguales por lo que

$$\cos x = \cos(\widehat{DBC}) = \frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen} y} \Longrightarrow \overline{DC} = \cos x \operatorname{sen} y$$

En la figura anterior se han representado en la circunferencia unidad dos ángulos con medidas en radianes x e y, uno a continuación del otro. Observa que $\operatorname{sen}(x+y) = \overline{ED} + \overline{DC}$ y

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{ED}}{\cos y} \Longrightarrow \overline{ED} = \operatorname{sen} x \cos y$$

Observa que los ángulos $\widehat{ODE}$ y $\widehat{DBC}$ son iguales por lo que

$$\cos x = \cos(\widehat{DBC}) = \frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen} y} \Longrightarrow \overline{DC} = \cos x \operatorname{sen} y$$

Por tanto

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

En la figura anterior se han representado en la circunferencia unidad dos ángulos con medidas en radianes x e y, uno a continuación del otro. Observa que $\operatorname{sen}(x+y)=\overline{ED}+\overline{DC}$ y

$$\operatorname{sen} x=\frac{\overline{ED}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{ED}}{\cos y}\Longrightarrow\overline{ED}=\operatorname{sen} x\cos y$$

Observa que los ángulos $\widehat{ODE}$ y $\widehat{DBC}$ son iguales por lo que

$$\cos x=\cos(\widehat{DBC})=\frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen} y}\Longrightarrow\overline{DC}=\cos x\operatorname{sen} y$$

Por tanto

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x\cos y+\cos x\operatorname{sen} y\qquad(x,y\in\mathbb{R})$$

Deducimos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2)=\cos x$ y $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen} x$ y también

$$\operatorname{sen}(x+\pi)=\operatorname{sen}(x+\pi/2+\pi/2)=\cos(x+\pi/2)$$

por lo que $\cos(x+\pi/2)=-\operatorname{sen} x$.

En la figura anterior se han representado en la circunferencia unidad dos ángulos con medidas en radianes x e y, uno a continuación del otro. Observa que $\operatorname{sen}(x+y) = \overline{ED} + \overline{DC}$ y

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{ED}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{ED}}{\cos y} \Longrightarrow \overline{ED} = \operatorname{sen} x \cos y$$

Observa que los ángulos $\widehat{ODE}$ y $\widehat{DBC}$ son iguales por lo que

$$\cos x = \cos(\widehat{DBC}) = \frac{\overline{DC}}{\operatorname{sen} y} \Longrightarrow \overline{DC} = \cos x \operatorname{sen} y$$

Por tanto

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

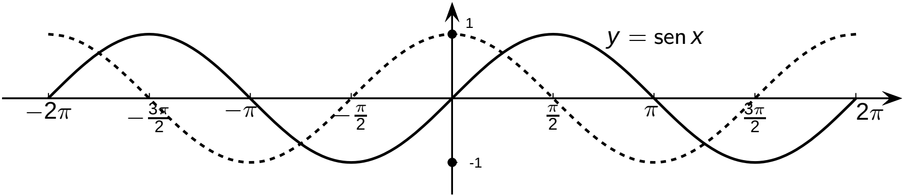
Deducimos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ y también

$$\operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen}(x+\pi/2+\pi/2) = \cos(x+\pi/2)$$

por lo que $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$.Usando estos resultados obtenemos

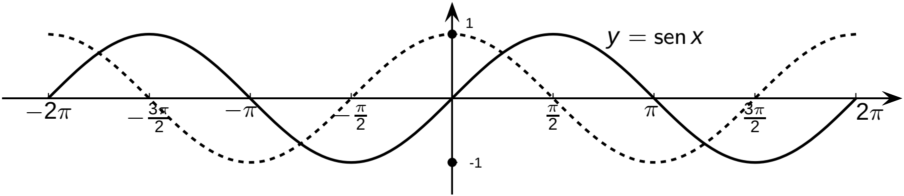
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Aquí puedes ver la gráfica de la función seno y, en línea de trazos, la del coseno.



Las funciones seno y coseno

Aquí puedes ver la gráfica de la función seno y, en línea de trazos, la del coseno.



Las funciones seno y coseno

Te recuerdo que **la medida de un ángulo en radianes** es la medida del arco que dicho ángulo abarca en la circunferencia unidad. Así, la medida en radianes de un ángulo recto es $\pi/2$. **El seno de un ángulo se define como el seno de la medida en radianes de dicho ángulo**. En las figuras anteriores el seno del ángulo $\widehat{OUP_x}$ es precisamente $\operatorname{sen} x$.

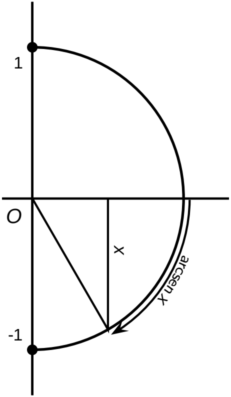
Dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es igual a x, dicho número se llama *arco seno de* x y se representa por $\operatorname{arcsen} x$.

Dado un número $x \in [-1,1]$ hay un único número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es igual a x, dicho número se llama *arco seno de* x y se representa por $\operatorname{arcsen} x$.Por tanto se verifica que

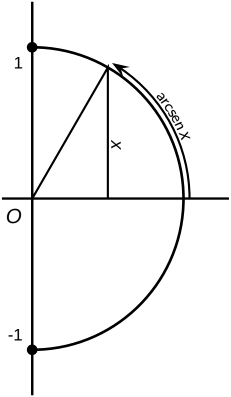
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Dado un número $x \in [-1,1]$ hay un único número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es igual a x, dicho número se llama *arco seno de x* y se representa por $\operatorname{arcsen} x$.Por tanto se verifica que

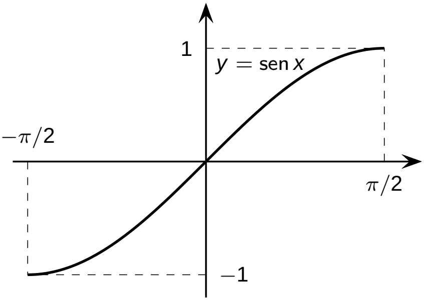
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$



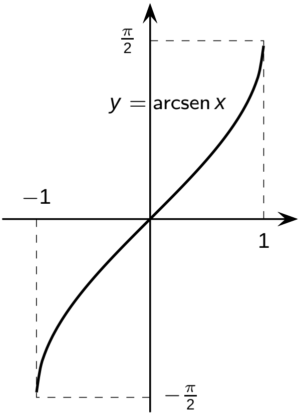
$-1 \leqslant x \leqslant 0$



$0 \leqslant x \leqslant 1$



La función seno en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



La función arcoseno

Observa que

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Observa que

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Dado un número $x \in [-1,1]$ hay un único número en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno es igual a x, dicho número se llama *arco coseno de* x y se representa por $\arccos x$. Por tanto se verifica que

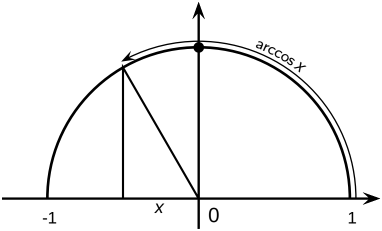
$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \qquad \cos(\arccos x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

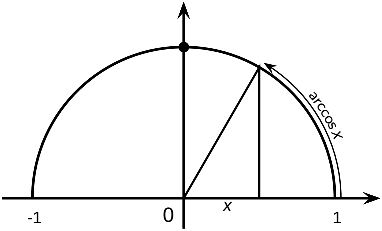
Observa que

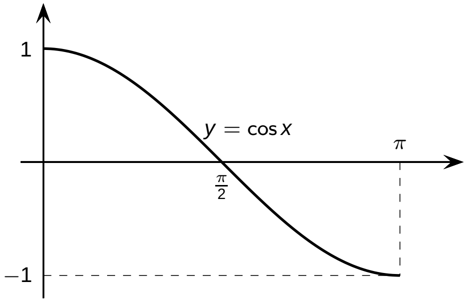
$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es igual a x, dicho número se llama *arco coseno de* x y se representa por $\arccos x$. Por tanto se verifica que

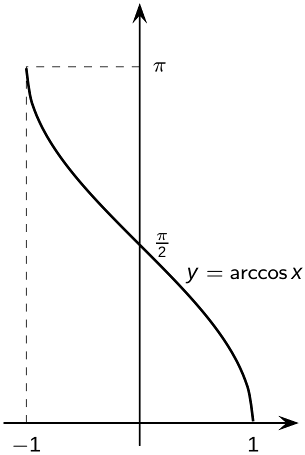
$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \qquad \cos(\arccos x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$







La función coseno en $[0, \pi]$



La función arcocoseno

Observa que

$$\arccos(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

Observa que

$$\arccos(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

La función seno se anula en los números de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.
La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Observa que

$$\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

La función seno se anula en los números de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

Observa que

$$\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

La función seno se anula en los números de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

Observa que

$$\arccos(\cos x) = x \iff 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

La función seno se anula en los números de la forma $k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

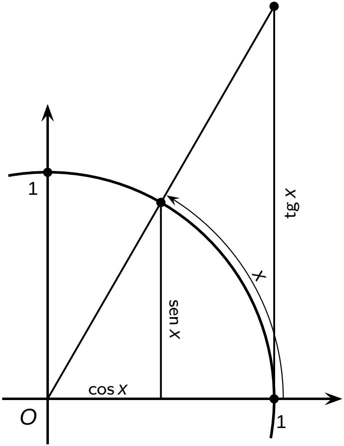
Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Estas funciones están definidas en todo punto donde los denominadores respectivos no se anulan.

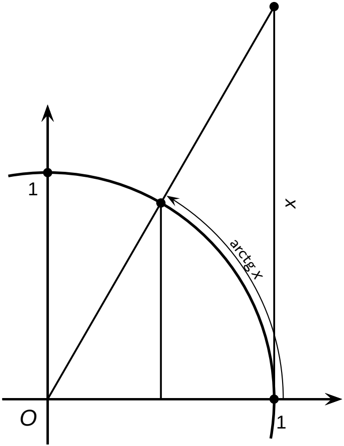
Las propiedades de estas funciones se deducen fácilmente de las propiedades del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

En la siguiente gráfica puedes ver una representación de la tangente de un número $x > 0$.



$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Dado un número $x \in \mathbb{R}$ hay un único número en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ cuya tangente es igual a x, dicho número se llama *arco tangente* de x se representa por $\operatorname{arctg} x$.



$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

Tenemos que

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Tenemos que

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Observa que

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

Tenemos que

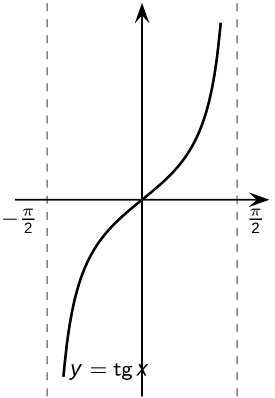
$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Observa que

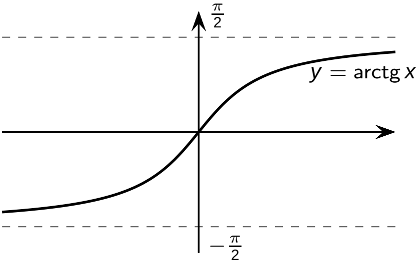
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

Y también

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}}$$



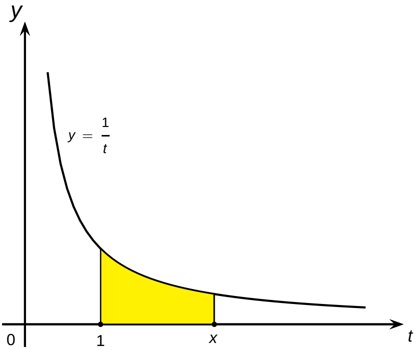
La función tangente en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

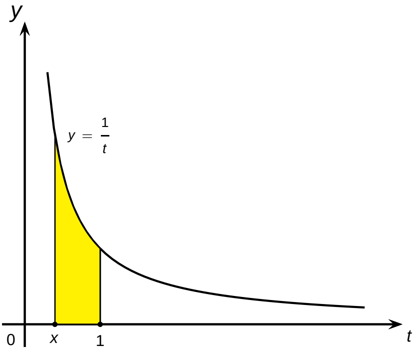


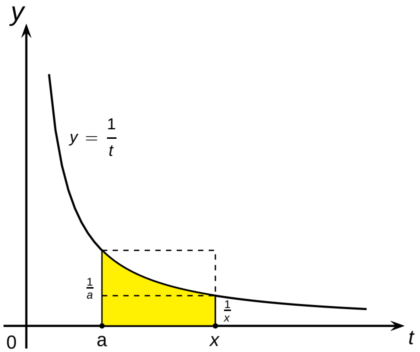
La función arcotangente

La función logaritmo natural. Dado un número $x > 0$ definimos el logaritmo natural o neperiano de x, representado por $\ln x$, como el área de la región del plano limitada por el eje de abscisas y la curva $y = 1/t$ cuando la variable t recorre el intervalo de extremos 1 y x, con el convenio de que si $x > 1$ el valor de dicha área es positivo, y si $0 < x < 1$ el valor de dicha área se toma como negativo.

La función logaritmo natural. Dado un número $x > 0$ definimos el logaritmo natural o neperiano de x, representado por $\ln x$, como el área de la región del plano limitada por el eje de abscisas y la curva $y = 1/t$ cuando la variable t recorre el intervalo de extremos 1 y x, con el convenio de que si $x > 1$ el valor de dicha área es positivo, y si $0 < x < 1$ el valor de dicha área se toma como negativo.







Para estudiar las propiedades de la función logaritmo natural usaremos algunos resultados de derivadas que seguramente ya conoces y que repasaremos más adelante. Sea $a > 0$ y supongamos que $x > a$. El área en amarillo en la figura de la izquierda representa $\ln x - \ln a$. Dicha área es claramente mayor que la del rectángulo de base $x - a$ y altura $\frac{1}{x}$ y menor que la del rectángulo de base $x - a$ y altura $\frac{1}{a}$.

$$(x-a)\frac{1}{x} < \ln x - \ln a < (x-a)\frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln x - \ln a}{x-a} < \frac{1}{a}$$

Análogamente, si $0 < x < a$, obtenemos que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{x}$. De estas dos desigualdades se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

Análogamente, si $0 < x < a$, obtenemos que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{x}$. De estas dos desigualdades se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

Es decir $\ln' a = \frac{1}{a}$. Como esto es válido para cualquier número positivo, hemos probado que la función logaritmo natural es derivable en $\mathbb{R}^+$ y su derivada viene dada por $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Análogamente, si $0 < x < a$, obtenemos que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{x}$. De estas dos desigualdades se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

Es decir $\ln' a = \frac{1}{a}$. Como esto es válido para cualquier número positivo, hemos probado que la función logaritmo natural es derivable en $\mathbb{R}^+$ y su derivada viene dada por $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Como la derivada es positiva, deducimos que el logaritmo natural es una función estrictamente creciente.

Análogamente, si $0 < x < a$, obtenemos que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{x}$. De estas dos desigualdades se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

Es decir $\ln' a = \frac{1}{a}$. Como esto es válido para cualquier número positivo, hemos probado que la función logaritmo natural es derivable en $\mathbb{R}^+$ y su derivada viene dada por $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Como la derivada es positiva, deducimos que el logaritmo natural es una función estrictamente creciente.

Sea ahora $a > 0$ y consideremos la función f definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \ln(ax)$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

Análogamente, si $0 < x < a$, obtenemos que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} < \dfrac{1}{x}$. De estas dos desigualdades se deduce que

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

Es decir $\ln' a = \frac{1}{a}$. Como esto es válido para cualquier número positivo, hemos probado que la función logaritmo natural es derivable en $\mathbb{R}^+$ y su derivada viene dada por $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Como la derivada es positiva, deducimos que el logaritmo natural es una función estrictamente creciente.

Sea ahora $a > 0$ y consideremos la función f definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \ln(ax)$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

Por tanto, la función $f(x) - \ln x$ tiene derivada cero en $\mathbb{R}^+$, lo que nos dice que dicha función es constante. Luego $f(x) - \ln x = f(1)$. Hemos obtenido así que $\ln(ax) = \ln x + \ln a$. Igualdad que es válida cualesquiera sean los números $a > 0$ y $x > 0$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.
- $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. También $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.
- $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. También $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- La función logaritmo es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.
- $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. También $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- La función logaritmo es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.
- $\ln(x^r) = r \ln x$ para todo $x > 0$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.
- $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. También $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- La función logaritmo es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.
- $\ln(x^r) = r \ln x$ para todo $x > 0$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$.

A partir de aquí deducimos con facilidad las siguientes propiedades del logaritmo natural

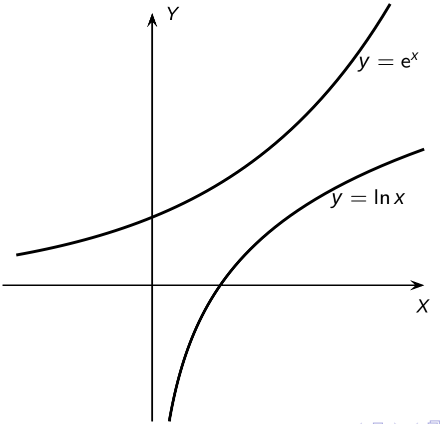
- $\ln(1/x) = -\ln x$ para todo $x > 0$.
- $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo $x > 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. También $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- La función logaritmo es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$.
- $\ln(x^r) = r \ln x$ para todo $x > 0$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Se define el número e como el único número positivo que verifica que $\ln \mathrm{e} = 1$.

La función exponencial. Dado $x \in \mathbb{R}$, notaremos $\exp(x)$ al un único número positivo cuyo logaritmo es igual a x.

La función exponencial. Dado $x \in \mathbb{R}$, notaremos $\exp(x)$ al un único número positivo cuyo logaritmo es igual a x.Queda así definida una función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ por la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $\ln(\exp(x)) = x$.

La función exponencial. Dado $x \in \mathbb{R}$, notaremos $\exp(x)$ al un único número positivo cuyo logaritmo es igual a x.Queda así definida una función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ por la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica $\ln(\exp(x)) = x$.Puesto que para todo $r \in \mathbb{Q}$ se verifica que $\ln(e^r) = r$, deducimos que $\exp(r) = e^r$, por lo que para todo $x \in \mathbb{R}$ se usa la notación $\exp(x) = e^x$.



Potencias de base y exponente real. Se define

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})}$$

Potencias de base y exponente real. Se define

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})}$$

Dados $a > 0$ con $a \neq 1$ y $x > 0$, se define el logaritmo en base a de x por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Potencias de base y exponente real. Se define

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})}$$

Dados $a > 0$ con $a \neq 1$ y $x > 0$, se define el logaritmo en base a de x por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Con ello se tiene que

$$a^{\log_a x} = \exp(\log_a x \ln a) = \exp(\ln x) = x$$

Potencias de base y exponente real. Se define

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x} \qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})}$$

Dados $a > 0$ con $a \neq 1$ y $x > 0$, se define el logaritmo en base a de x por

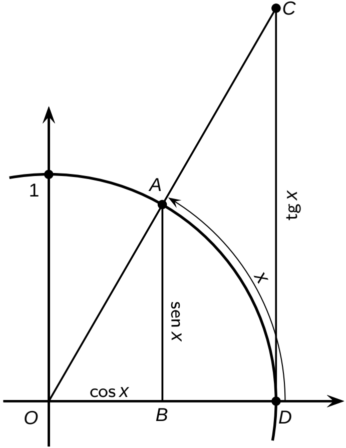
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Con ello se tiene que

$$a^{\log_a x} = \exp(\log_a x \ln a) = \exp(\ln x) = x$$

El logaritmo en base 10 se llama *logaritmo decimal*, no lo usaremos en este curso.

Derivabilidad de las funciones seno y coseno



Supongamos que $0 < x < \pi/2$. Observa que, evidentemente, se verifica que el área del triángulo *OAB* es menor que el área del sector circular *OAD* y ésta es menor que el área del triángulo *OCD*. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular en una circunferencia de radio r es $\frac{1}{2}\vartheta r^2$ donde ϑ es la medida en radianes de dicho sector, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Longrightarrow \cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Esta desigualdad no cambia al sustituir x por $-x$, por lo que también es válida para $-\pi/2 < x < 0$. Tomando límites para $x \to 0$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Esta desigualdad no cambia al sustituir x por $-x$, por lo que también es válida para $-\pi/2 < x < 0$. Tomando límites para $x \to 0$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Teniendo en cuenta que $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, deducimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x} = 0$$

.

Esta desigualdad no cambia al sustituir x por $-x$, por lo que también es válida para $-\pi/2 < x < 0$. Tomando límites para $x \to 0$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Teniendo en cuenta que $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, deducimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x} = 0$$

. Sea $a\in\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \operatorname{sen} a\frac{\cos x - 1}{x} + \cos a\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \cos a$$

Esta desigualdad no cambia al sustituir x por $-x$, por lo que también es válida para $-\pi/2 < x < 0$. Tomando límites para $x \to 0$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Teniendo en cuenta que $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, deducimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x} = 0$$

. Sea $a \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \operatorname{sen} a \frac{\cos x - 1}{x} + \cos a \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \cos a$$

Hemos probado que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$.

Esta desigualdad no cambia al sustituir x por $-x$, por lo que también es válida para $-\pi/2 < x < 0$. Tomando límites para $x \to 0$ obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Teniendo en cuenta que $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, deducimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{x} = 0$$

. Sea $a \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \operatorname{sen} a \frac{\cos x - 1}{x} + \cos a \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen} a}{x} = \cos a$$

Hemos probado que $\operatorname{sen}'(a) = \cos a$ .Como $\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2)$, deducimos que el coseno es derivable y

$$\cos' x = -2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = -\operatorname{sen} x$$