Integrales múltiples

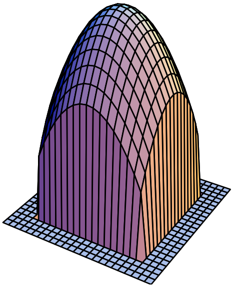
UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

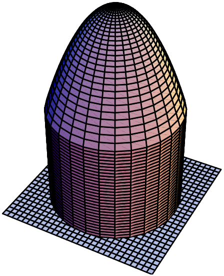
ugr Universidad de Granada

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y acotado de dos variables definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que $f(x,y) \geqslant 0$ para todo $(x,y) \in A$. Consideremos el “cilindro” en $\mathbb{R}^3$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f, es decir el conjunto

$$C(f,A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\right\}.$$

Las siguientes figuras muestran este conjunto para la función $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ y los conjuntos $A = [-1,1] \times [-1,1]$ y $A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\right\}$.





El valor de integral doble $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana A. En tal caso la integral doble proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina A.

El valor de integral doble $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana A. En tal caso la integral doble proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina A.

Las integrales dobles también permiten calcular áreas planas. En efecto, basta tener en cuenta que si f es la función constante igual a 1, esto es $f(x,y)=1$ para todo $(x,y)\in A$, entonces se tiene que $\mathrm{volumen}(C(f,A))=\mathrm{área}(A)$, pues el volumen de un cilindro de altura constante igual a 1 es numéricamente igual al área de su base.

$$\iint\limits_A \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{área}(A) \tag{1}$$

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de tres variables, positivo, continuo y acotado, definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, y consideramos el “cilindro” en $\mathbb{R}^4$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f:

$$C(f,A) = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : (x,y,z)\in A,\ 0 \leqslant w \leqslant f(x,y,z)\right\},$$

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de tres variables, positivo, continuo y acotado, definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, y consideramos el "cilindro" en $\mathbb{R}^4$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f:

$$C(f,A) = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in A,\ 0 \leqslant w \leqslant f(x,y,z) \right\},$$

el valor de la integral triple $\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ nos da el volumen de dicho cilindro.

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de tres variables, positivo, continuo y acotado, definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, y consideramos el “cilindro” en $\mathbb{R}^4$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f:

$$C(f,A) = \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in A,\ 0 \leqslant w \leqslant f(x,y,z)\Big\},$$

el valor de la integral triple $\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ nos da el volumen de dicho cilindro.Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad volumétrica de masa o de carga eléctrica en un sólido A. En tal caso la integral triple proporciona, respectivamente, la masa o la carga total del sólido A.

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de tres variables, positivo, continuo y acotado, definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$, y consideramos el "cilindro" en $\mathbb{R}^4$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f:

$$C(f,A) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \in A,\ 0 \leqslant w \leqslant f(x,y,z)\right\},$$

el valor de la integral triple $\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ nos da el volumen de dicho cilindro.Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad volumétrica de masa o de carga eléctrica en un sólido A. En tal caso la integral triple proporciona, respectivamente, la masa o la carga total del sólido A.

Si integramos la función constante igual a 1 en un sólido $A \subset \mathbb{R}^3$, obtenemos el volumen de A.

$$\iiint\limits_A \mathrm{d}(x,y,z) = \mathrm{volumen}(A) \tag{2}$$

El siguiente resultado, que ya utilizamos para calcular volúmenes de cuerpos de revolución, permite calcular volúmenes integrando áreas de secciones planas, y en consecuencia permite calcular una integral doble mediante dos integrales simples.

El siguiente resultado, que ya utilizamos para calcular volúmenes de cuerpos de revolución, permite calcular volúmenes integrando áreas de secciones planas, y en consecuencia permite calcular una integral doble mediante dos integrales simples.

Cálculo de volúmenes por secciones planas. *El volumen de una región en* $\mathbb{R}^3$ *es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.*

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A=[a,b]\times[c,d]$. Pongamos

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\right\}.$$

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$. Pongamos

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$. Pongamos

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.Para cada $x_0 \in [a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X = x_0$.

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A=[a,b]\times[c,d]$. Pongamos

$$\Omega=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\Big\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.Para cada $x_0\in[a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X=x_0$.Fíjate que $\Omega(x_0)$ es una sección de Ω perpendicular al eje OX y, por tanto, paralela al plano YZ.

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$. Pongamos

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y) \right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.Para cada $x_0 \in [a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X = x_0$.Fíjate que $\Omega(x_0)$ es una sección de Ω perpendicular al eje OX y, por tanto, paralela al plano YZ.Como

$$\Omega(x_0) = \{(x_0,y,z) : y \in [c,d],\ 0 \leqslant z \leqslant f(x_0,y)\}$$

se tiene que $\Omega(x_0)$ es la región del plano $X = x_0$ comprendida entre la curva $z = f(x_0,y)$, el eje OY y las rectas $y = c$, $y = d$.

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A=[a,b]\times[c,d]$. Pongamos

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.Para cada $x_0\in[a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X=x_0$.Fíjate que $\Omega(x_0)$ es una sección de Ω perpendicular al eje OX y, por tanto, paralela al plano YZ.Como

$$\Omega(x_0)=\{(x_0,y,z):y\in[c,d],\ 0\leqslant z\leqslant f(x_0,y)\}$$

se tiene que $\Omega(x_0)$ es la región del plano $X=x_0$ comprendida entre la curva $z=f(x_0,y)$, el eje OY y las rectas $y=c$, $y=d$.Como sabes, el área de dicha región viene dada por $\displaystyle\int_c^d f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A = [a,b] \times [c,d]$. Pongamos

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue.Para cada $x_0 \in [a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X = x_0$.Fíjate que $\Omega(x_0)$ es una sección de Ω perpendicular al eje OX y, por tanto, paralela al plano YZ.Como

$$\Omega(x_0) = \{(x_0,y,z) : y \in [c,d],\ 0 \leqslant z \leqslant f(x_0,y)\}$$

se tiene que $\Omega(x_0)$ es la región del plano $X = x_0$ comprendida entre la curva $z = f(x_0,y)$, el eje OY y las rectas $y = c$, $y = d$.Como sabes, el área de dicha región viene dada por $\displaystyle\int_c^d f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.Para calcular el volumen de Ω hay que integrar las áreas de las secciones $\Omega(x)$ cuando $x \in [a,b]$, y obtenemos finalmente que

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{volumen}(\Omega) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \qquad (3)$$

Razonando de forma análoga, considerando secciones $\Omega(y)$ de Ω paralelas al plano XZ, se obtiene la igualdad

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{volumen}(\Omega) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \qquad (4)$$

Razonando de forma análoga, considerando secciones $\Omega(y)$ de Ω paralelas al plano XZ, se obtiene la igualdad

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \text{volumen}(\Omega) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{4}$$

De las igualdades (3) y (4) se deduce que

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{5}$$

Las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$ y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$ y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples. Para calcular $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ lo que se hace es integrar respecto a la variable y considerando x fija.

Las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$ y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples. Para calcular $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ lo que se hace es integrar respecto a la variable y considerando x fija.Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ y usar la regla de Barrow.

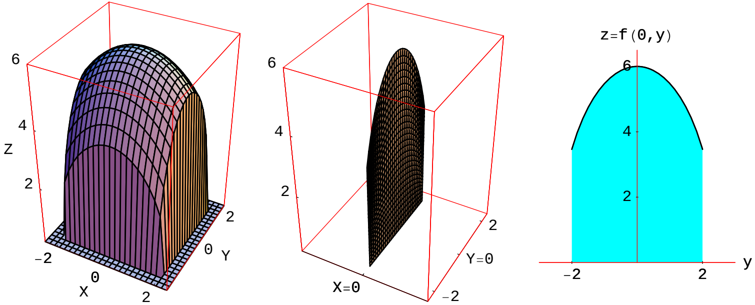
Las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$ y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples. Para calcular $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ lo que se hace es integrar respecto a la variable y considerando x fija.Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ y usar la regla de Barrow.Fíjate que una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ puede describirse como una *primitiva parcial* de $f(x,y)$ con respecto a y.

Las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ y $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples. Para calcular $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ lo que se hace es integrar respecto a la variable y considerando x fija.Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ y usar la regla de Barrow.Fíjate que una primitiva de la función $y \mapsto f(x,y)$ puede describirse como una *primitiva parcial* de $f(x,y)$ con respecto a y.

La representación gráfica siguiente puede ayudarte a entender lo que se hace. La función representada es $f(x,y) = \sqrt{36-3x^2-6y^2}$ en el rectángulo $[-2,2]\times[-2,2]$. Puedes ver el “cilindro” Ω bajo la gráfica de la función, la sección del mismo por el plano $X=0$ y la proyección de dicha sección sobre el plano YZ.



6
4
Z
2
-2
0
X
2
2
0
Y
6
4
2
X=0
2
Y=0
-2
z=f(0,y)
6
4
2
-2
2
y

Para calcular una integral $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.

Para calcular una integral $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X = x$ corta al "cilindro" bajo la gráfica de f, es decir, *tenemos que determinar la proyección de A sobre el eje OX*.

Para calcular una integral $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X = x$ corta al “cilindro” bajo la gráfica de f, es decir, *tenemos que determinar la proyección de* A *sobre el eje* OX.Supongamos que dicha proyección sea un intervalo $[a,b]$.

Para calcular una integral $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X=x$ corta al "cilindro" bajo la gráfica de f, es decir, *tenemos que determinar la proyección de* A *sobre el eje* OX.Supongamos que dicha proyección sea un intervalo $[a,b]$.Ahora, para cada $x\in[a,b]$ hay que calcular el área de la sección $\Omega(x)$ o, lo que es igual, el área de la región en el plano YZ comprendida entre el eje OY y la curva $z=f(x,y)$ *donde la variable* y *está en el conjunto* $A(x)=\{y:(x,y)\in A\}$.

Para calcular una integral $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X=x$ corta al "cilindro" bajo la gráfica de f, es decir, *tenemos que determinar la proyección de A sobre el eje OX*.Supongamos que dicha proyección sea un intervalo $[a,b]$.Ahora, para cada $x\in[a,b]$ hay que calcular el área de la sección $\Omega(x)$ o, lo que es igual, el área de la región en el plano YZ comprendida entre el eje OY y la curva $z=f(x,y)$ *donde la variable y está en el conjunto* $A(x)=\{y:(x,y)\in A\}$.Supongamos que $A(x)$ sea un intervalo (tampoco pasa nada si es unión de varios intervalos). Entonces tenemos que

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_{A(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \tag{6}$$

Para calcular una integral $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma.La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X=x$ corta al "cilindro" bajo la gráfica de f, es decir, *tenemos que determinar la proyección de* A *sobre el eje* OX.Supongamos que dicha proyección sea un intervalo $[a,b]$.Ahora, para cada $x\in[a,b]$ hay que calcular el área de la sección $\Omega(x)$ o, lo que es igual, el área de la región en el plano YZ comprendida entre el eje OY y la curva $z=f(x,y)$ *donde la variable* y *está en el conjunto* $A(x)=\{y:(x,y)\in A\}$.Supongamos que $A(x)$ sea un intervalo (tampoco pasa nada si es unión de varios intervalos). Entonces tenemos que

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b\left[\int\limits_{A(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{6}$$

Análogamente se obtiene que

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_c^d\left[\int\limits_{A(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{7}$$

Donde hemos supuesto que $[c,d]$ es *la proyección de* A *sobre el eje* OY, y para cada $y\in[c,d]$ es $A(y)=\{x:(x,y)\in A\}$.

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\} \qquad \text{(tipo I)} \\ A &= \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\} \qquad \text{(tipo II)} \end{aligned}$$

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\} \qquad \text{(tipo I)} \\
A &= \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\} \qquad \text{(tipo II)}
\end{aligned}
$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \tag{9}$$

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\} \qquad \text{(tipo I)} \\ A &= \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\} \qquad \text{(tipo II)} \end{aligned}$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \tag{9}$$

Observa que para el caso en que $f(x,y) = 1$ recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\} \qquad \text{(tipo I)} \\ A &= \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\} \qquad \text{(tipo II)} \end{aligned}$$

En tales casos tenemos que

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \tag{9}$$

Observa que para el caso en que $f(x,y) = 1$ recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

Aunque hemos supuesto inicialmente que la función f es positiva, las igualdades obtenidas son válidas para campos escalares continuos y acotados.

De forma análoga a lo antes visto, podemos calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función f definida en el rectángulo de $\mathbb{R}^3$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ se tiene que

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[u,v]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_u^v f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

De forma análoga a lo antes visto, podemos calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función f definida en el rectángulo de $\mathbb{R}^3$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ se tiene que

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[u,v]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_u^v f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Observa que ahora hay seis integrales iteradas pero el valor de todas ellas es el mismo.

De forma análoga a lo antes visto, podemos calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función f definida en el rectángulo de $\mathbb{R}^3$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$ se tiene que

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[u,v]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_u^v f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Observa que ahora hay seis integrales iteradas pero el valor de todas ellas es el mismo.Naturalmente, cuando A es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ hay más posibilidades. Una forma de proceder es expresar el conjunto A por medio de sus secciones por planos paralelos a uno de los planos coordenados.

De forma análoga a lo antes visto, podemos calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función f definida en el rectángulo de $\mathbb{R}^3$ $A=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ se tiene que

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[u,v]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_u^v f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Observa que ahora hay seis integrales iteradas pero el valor de todas ellas es el mismo.Naturalmente, cuando A es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ hay más posibilidades. Una forma de proceder es expresar el conjunto A por medio de sus secciones por planos paralelos a uno de los planos coordenados.

Por ejemplo, cortando A por planos paralelos al plano XY podemos descomponer A en secciones paralelas a dicho plano. Si la proyección de A sobre el eje OZ es un intervalo $J=[u,v]$, y para cada $z\in J$ es $A(z)=\{(x,y):(x,y,z)\in A\}$ (la proyección sobre el plano XY de la sección de A por el plano paralelo al plano XY de cota z), entonces

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_u^v \left[\iint\limits_{A(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y) \right] \mathrm{d}z$$

Otra forma de proceder es proyectar A sobre uno de los planos coordenados para describir A como un conjunto de tipo I. Por ejemplo, si A puede representarse en la forma

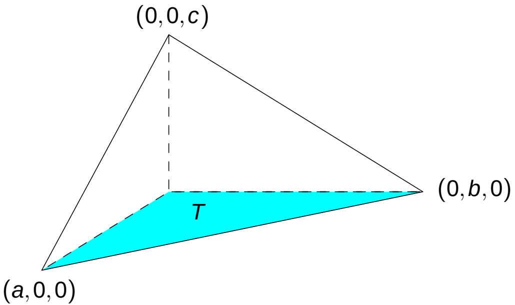
$$A = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ g(x,y) \leqslant z \leqslant h(x,y)\}$$

donde Ω es la proyección de A sobre el plano XY, y g, h, son funciones reales definidas en Ω, entonces tenemos que

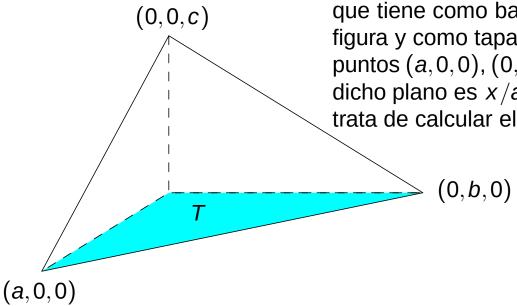
$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_\Omega \left[\int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}(x,y)$$

Ejemplo. Calcula, mediante una integral doble, el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ (donde a, b, c son números positivos).

Ejemplo. Calcula, mediante una integral doble, el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ (donde a, b, c son números positivos).

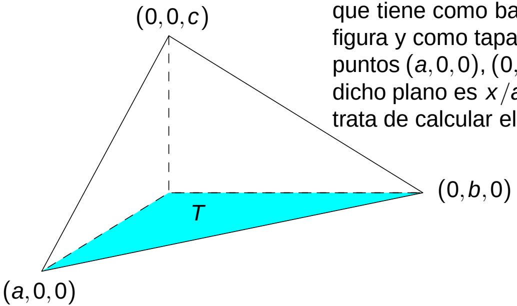


Ejemplo. Calcula, mediante una integral doble, el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ (donde a,b,c son números positivos).



El tetraedro en cuestión es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene como base el triángulo T en azul en la figura y como tapadera el plano que pasa por los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$. La ecuación de dicho plano es $x/a+y/b+z/c=1$. Por tanto se trata de calcular el volumen del conjunto

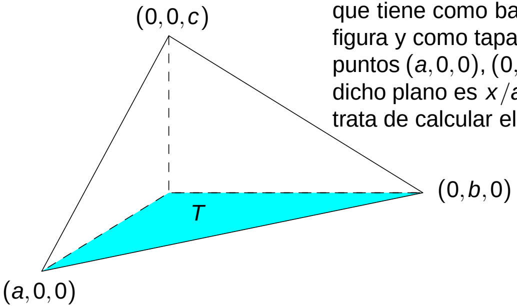
Ejemplo. Calcula, mediante una integral doble, el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ (donde a,b,c son números positivos).



El tetraedro en cuestión es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene como base el triángulo T en azul en la figura y como tapadera el plano que pasa por los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$. La ecuación de dicho plano es $x/a+y/b+z/c=1$. Por tanto se trata de calcular el volumen del conjunto

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leqslant x, 0\leqslant y,\ x/a+y/b\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant c(1-x/a-y/b)\right\}$$

Ejemplo. Calcula, mediante una integral doble, el volumen del tetraedro con vértices en el origen y en los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ (donde a,b,c son números positivos).



El tetraedro en cuestión es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene como base el triángulo T en azul en la figura y como tapadera el plano que pasa por los puntos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$. La ecuación de dicho plano es $x/a+y/b+z/c=1$. Por tanto se trata de calcular el volumen del conjunto

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leqslant x, 0\leqslant y,\ x/a+y/b\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant c(1-x/a-y/b)\right\}$$

La proyección de A sobre el plano XY es el triángulo $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x, 0\leqslant y,\ x/a+y/b\leqslant 1\}$ y podemos escribir

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in T,\ 0\leqslant z\leqslant c(1-x/a-y/b)\right\}$$

El volumen de A viene dado por

$$\iint_T c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)d(x,y)=\int_0^a\left[\int_0^{b(1-x/a)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\right]dx=$$

$$=c\int_0^a\left[y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b}\right]_{y=0}^{y=b(1-x/a)}=c\int_0^a\frac{b(a-x)^2}{2a^2}dx=\frac{1}{6}abc$$

Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a>0, b>0, c>0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde $a > 0, b > 0, c > 0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Se trata, pues, de calcular el volumen del conjunto

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ z \geqslant 0 \right\}.$$

Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a>0, b>0, c>0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Se trata, pues, de calcular el volumen del conjunto $\Omega=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0\right\}$.La proyección de Ω sobre el plano XY es el conjunto $A=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a>0, b>0, c>0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Se trata, pues, de calcular el volumen del conjunto $\Omega=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0\right\}$.La proyección de Ω sobre el plano XY es el conjunto $A=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.Podemos escribir

$$\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

Por tanto

$$\text{volumen}(\Omega) = \iint_A c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Por tanto

$$\text{volumen}(\Omega) = \iint_A c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Para calcular esta integral doble observamos que A es una región de tipo I en $\mathbb{R}^2$ pues

$$A = \left\{(x,y) : -a \leqslant x \leqslant a,\ -b\sqrt{1 - x^2/a^2} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - x^2/a^2}\right\}$$

Por tanto

$$\mathrm{volumen}(\Omega) = \iint_A c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Para calcular esta integral doble observamos que A es una región de tipo I en $\mathbb{R}^2$ pues

$$A = \left\{(x,y) : -a \leqslant x \leqslant a,\ -b\sqrt{1-x^2/a^2} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1-x^2/a^2}\right\}$$

Por tanto

$$\iint_A c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Por tanto

$$\operatorname{volumen}(\Omega) = \iint\limits_A c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Para calcular esta integral doble observamos que A es una región de tipo I en $\mathbb{R}^2$ pues

$$A = \left\{(x,y) : -a \leqslant x \leqslant a,\ -b\sqrt{1-x^2/a^2} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1-x^2/a^2}\right\}$$

Por tanto

$$\iint\limits_A c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Tenemos que

$$\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = \left[y = b\sqrt{1-x^2/a^2}\,\operatorname{sen} t\right] = bc(1-x^2/a^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}bc\pi(1-x^2/a^2)$$

Finalmente

$$\text{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2} bc\pi \int_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} abc\pi$$

Finalmente

$$\text{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2} bc\pi \int_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} abc\pi$$

El volumen del elipsoide completo es $\frac{4}{3}abc\pi$. En particular, si el elipsoide es una esfera de radio r, esto es $a = b = c = r$, deducimos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Finalmente

$$\mathrm{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2}bc\pi\int_{-a}^{a}(1-x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}abc\pi$$

El volumen del elipsoide completo es $\dfrac{4}{3}abc\pi$. En particular, si el elipsoide es una esfera de radio r, esto es $a=b=c=r$, deducimos que el volumen de la esfera es $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

En lugar de proyectar sobre el plano XY podemos proyectar Ω sobre el eje OZ. Dicha proyección es el intervalo $[0,c]$. Para cada $z\in[0,c]$ tenemos que el conjunto de puntos de Ω que se proyectan en z, es decir, la sección de Ω por el plano $Z=z$, es el conjunto

$$\Omega(z) = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

Finalmente

$$\text{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2}bc\pi\int_{-a}^{a}(1 - x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}abc\pi$$

El volumen del elipsoide completo es $\frac{4}{3}abc\pi$. En particular, si el elipsoide es una esfera de radio r, esto es $a = b = c = r$, deducimos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En lugar de proyectar sobre el plano XY podemos proyectar Ω sobre el eje OZ. Dicha proyección es el intervalo $[0, c]$. Para cada $z \in [0, c]$ tenemos que el conjunto de puntos de Ω que se proyectan en z, es decir, la sección de Ω por el plano $Z = z$, es el conjunto

$$\Omega(z) = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 - \frac{z^2}{c^2}\right\}$$

Como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 - \frac{z^2}{c^2} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} \leqslant 1$$

donde $u = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $v = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$.

Finalmente

$$\text{volumen}(\Omega) = \frac{1}{2}bc\pi \int_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}abc\pi$$

El volumen del elipsoide completo es $\frac{4}{3}abc\pi$. En particular, si el elipsoide es una esfera de radio r, esto es $a = b = c = r$, deducimos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En lugar de proyectar sobre el plano XY podemos proyectar Ω sobre el eje OZ. Dicha proyección es el intervalo $[0,c]$. Para cada $z \in [0,c]$ tenemos que el conjunto de puntos de Ω que se proyectan en z, es decir, la sección de Ω por el plano $Z = z$, es el conjunto

$$\Omega(z) = \left\{ (x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

Como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 - \frac{z^2}{c^2} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} \leqslant 1$$

donde $u = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $v = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$.Deducimos que $\Omega(z)$ es una elipse contenida en el plano $Z = z$ de semiejes u, v. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $\pi uv = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$.

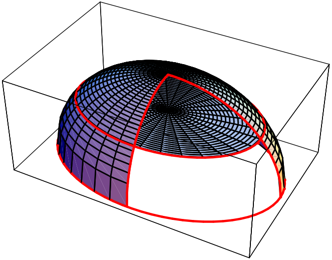
En consecuencia, el volumen de Ω viene dado por

$$\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{2}{3}abc\pi$$

En consecuencia, el volumen de Ω viene dado por

$$\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{2}{3}abc\pi$$

En la siguiente figura se ha representado el semi-elipsoide abierto para que pueda apreciarse mejor una sección por un plano de altura constante.



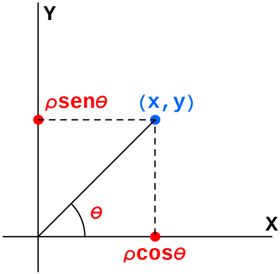
Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x,y) del plano son el par de números (ρ,ϑ) dados por

$$x=\rho\cos\vartheta,\;\; y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\;\; (\rho>0,\ -\pi<\vartheta\leqslant\pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x,y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x+iy$.

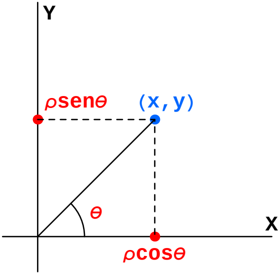


Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x,y) del plano son el par de números (ρ,ϑ) dados por

$$x=\rho\cos\vartheta,\ \ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\ \ (\rho>0,\ -\pi<\vartheta\leqslant\pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x,y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x+iy$.



La fórmula del cambio de variables a coordenadas polares se expresa por

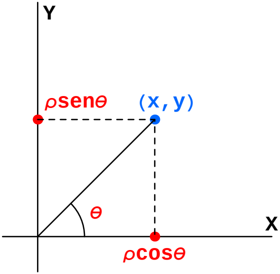
$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint\limits_B f(\rho\cos\vartheta,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) \tag{10}$$

Cambio de variable a coordenadas polares. La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x,y) del plano son el par de números (ρ,ϑ) dados por

$$x=\rho\cos\vartheta,\ \ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\ \ (\rho>0,\ -\pi<\vartheta\leqslant\pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x,y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x+iy$.



La fórmula del cambio de variables a coordenadas polares se expresa por

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint\limits_B f(\rho\cos\vartheta,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) \tag{10}$$

Donde el conjunto B es la expresión de A en coordenadas polares, es decir

$$B=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi]:(\rho\cos\vartheta,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\in A\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

entonces

$$B = \big\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi] : a \leqslant \rho\cos\vartheta \leqslant b,\ g(\rho\cos\vartheta) \leqslant \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \leqslant h(\rho\cos\vartheta)\big\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

entonces

$$B = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi] : a \leqslant \rho\cos\vartheta \leqslant b,\ g(\rho\cos\vartheta) \leqslant \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \leqslant h(\rho\cos\vartheta)\right\}$$

Es importante describir bien el conjunto B porque para calcular la integral

$$\iint\limits_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

tienes que calcular dos integrales simples como ya hemos visto anteriormente.

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I

$$A = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

entonces

$$B = \big\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi] : a \leqslant \rho\cos\vartheta \leqslant b,\ g(\rho\cos\vartheta) \leqslant \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \leqslant h(\rho\cos\vartheta)\big\}$$

Es importante describir bien el conjunto B porque para calcular la integral

$$\iint\limits_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

tienes que calcular dos integrales simples como ya hemos visto anteriormente.

Si, por ejemplo

$$B = \{(\rho,\vartheta) : \alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta,\ g(\vartheta) \leqslant \rho \leqslant h(\vartheta)\}$$

entonces

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \int_\alpha^\beta \left[\int_{g(\vartheta)}^{h(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\vartheta$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo.

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo.Si, por ejemplo, A es el disco $D((0,0),R)$ de centro el origen y radio R, $D((0,0),R) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, entonces

$$B = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi] : \rho \leqslant R\} =]0,R] \times]-\pi,\pi]$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo.Si, por ejemplo, A es el disco $D((0,0),R)$ de centro el origen y radio R, $D((0,0),R)=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant R^2\}$, entonces

$$B=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi]:\rho\leqslant R\}=]0,R]\times]-\pi,\pi]$$

Por tanto

$$\iint\limits_{D((0,0),R)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int\limits_0^R\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_0^R f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta$$

Vamos a calcular la integral

$$\iint_{D((1,0),1)} \exp\Big((x^2+y^2)/2x\Big)\, d(x,y)$$

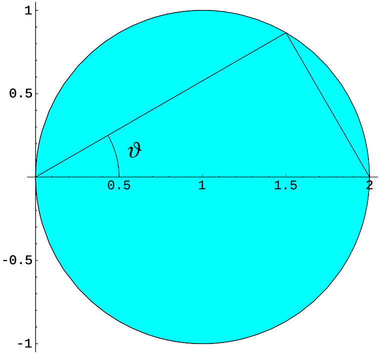
donde $D((1,0),1) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$ es el disco de centro $(1,0)$ y radio 1.

Vamos a calcular la integral

$$\iint_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right) d(x,y)$$

donde $D((1,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ es el disco de centro $(1,0)$ y radio 1.

Como el dominio de integración es un disco y en la función que queremos integrar figura la expresión x^2+y^2, para calcular la integral pasamos a coordenadas polares. Tenemos que



$$\iint_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right) d(x,y) = \iint_B \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta)$$

Donde

$$\begin{aligned}B &= \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\in D((1,0),1)\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\leqslant 1\right\} = \\ &= \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : \rho\leqslant 2\cos\vartheta, -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\}\end{aligned}$$

Donde

$$B = \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in D((1,0),1)\} =$$
$$= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\leqslant 1\right\} =$$
$$= \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : \rho\leqslant 2\cos\vartheta, -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\}$$

Descomponiendo en dos integrales simples resulta:

$$\iint_B \rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)d(\rho,\vartheta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\vartheta}\rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)d\rho\right]d\vartheta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta d\vartheta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2\vartheta))d\vartheta = 2\pi$$

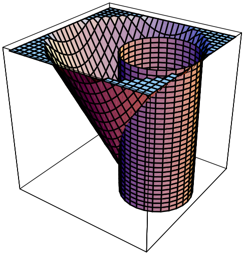
Sea $a > 0$. Vamos a calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = ax$, que está comprendido entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Sea $a > 0$. Vamos a calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = ax$, que está comprendido entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Se trata de calcular el volumen del sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a/2)^2 + y^2 \leqslant a^2/4,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

Dicho sólido es la parte de $\mathbb{R}^3$ que queda dentro del cilindro circular recto de base la circunferencia en el plano XY de centro $(a/2, 0)$ y radio $a/2$ y que está limitado superiormente por la gráfica del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Puedes ver el cono y el cilindro en la gráfica de la derecha.



Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}(x,y)$$

Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

donde

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant ax\right\} = \left\{(x,y) : (x-a/2)^2+y^2 \leqslant a^2/4\right\}$$

es el disco de centro $(a/2,0)$ y radio $a/2$.

Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

donde

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant ax\right\} = \left\{(x,y) : (x-a/2)^2+y^2 \leqslant a^2/4\right\}$$

es el disco de centro $(a/2,0)$ y radio $a/2$.La simetría polar de la función a integrar indica que es conveniente hacer un cambio de variable a polares $x = \rho\cos t$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,t$.

Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}(x,y)$$

donde

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant ax\right\} = \left\{(x,y) : (x - a/2)^2 + y^2 \leqslant a^2/4\right\}$$

es el disco de centro $(a/2, 0)$ y radio $a/2$.La simetría polar de la función a integrar indica que es conveniente hacer un cambio de variable a polares $x = \rho \cos t$, $y = \rho \operatorname{sen} t$.

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}(x,y) = \iint_B \rho^2\, \mathrm{d}(\rho, t)$$

Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

donde

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant ax\right\} = \left\{(x,y) : (x-a/2)^2+y^2 \leqslant a^2/4\right\}$$

es el disco de centro $(a/2,0)$ y radio $a/2$.La simetría polar de la función a integrar indica que es conveniente hacer un cambio de variable a polares $x = \rho\cos t$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,t$.

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_B \rho^2\,\mathrm{d}(\rho,t)$$

donde

$$\begin{aligned} B &= \{(\rho,t) : (\rho\cos t, \rho\,\mathrm{sen}\,t) \in D\} = \{(\rho,t) : \rho \leqslant a\cos t\} = \\ &= \{(\rho,t) : -\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2,\ \rho \leqslant a\cos t\} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_B \rho^2 \,\mathrm{d}(\rho, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{a\cos t} \rho^2 \,\mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}t = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t (1 - \operatorname{sen}^2 t) \,\mathrm{d}t = \frac{4a^3}{9}$$