Análisis Matemático
Integración de funciones continuas

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Área del conjunto limitado por una gráfica

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ notaremos por $G(f,a,b)$ el conjunto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.

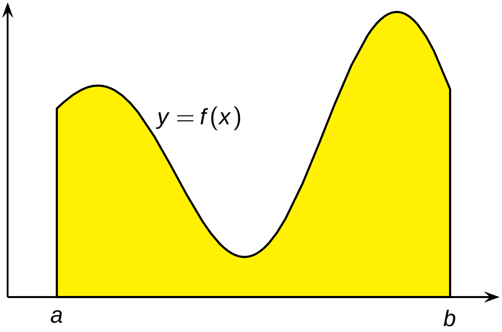


Figure: El conjunto $G(f,a,b)$

Queremos calcular el área de dicho conjunto. Para ello, primero se divide el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a,b]$.

Queremos calcular el área de dicho conjunto. Para ello, primero se divide el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a,b]$. Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k = \max f[x_{k-1},x_k]$, $m_k = \min f[x_{k-1},x_k]$.

Queremos calcular el área de dicho conjunto. Para ello, primero se divide el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a,b]$. Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k = \max f[x_{k-1},x_k]$, $m_k = \min f[x_{k-1},x_k]$.Los números

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Queremos calcular el área de dicho conjunto. Para ello, primero se divide el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

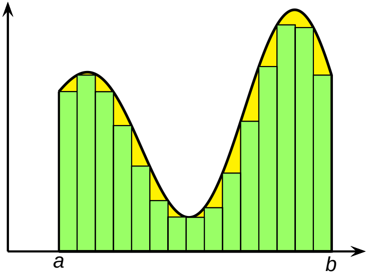
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a,b]$. Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $M_k = \max f[x_{k-1},x_k]$, $m_k = \min f[x_{k-1},x_k]$.Los números

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P.

Cuando la función f *es positiva*, y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f,a,b)$.



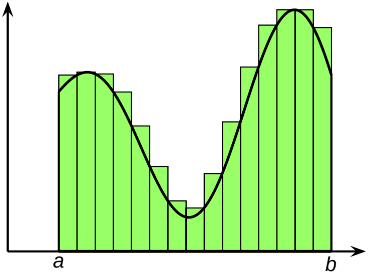


Figure: Aproximaciones del área por defecto y por exceso

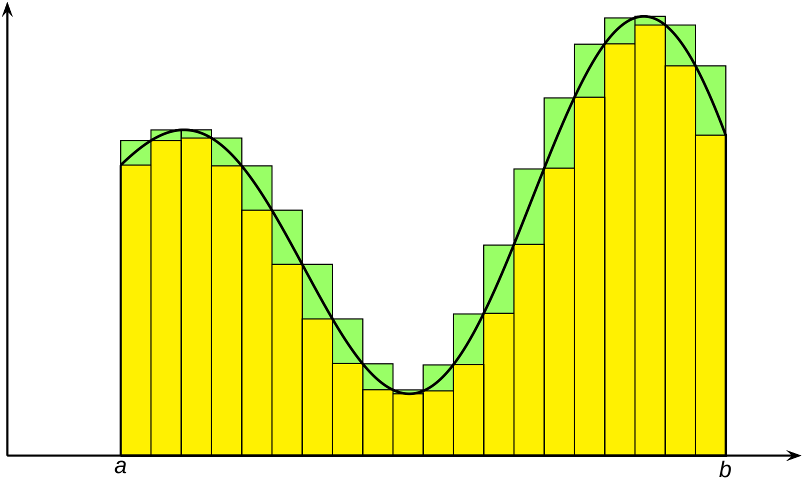


Figure: Diferencia entre las aproximaciones del área por defecto y por exceso

La integral como área

Si f es una función *continua y positiva* en $[a,b]$, se verifica que las sumas superiores e inferiores se aproximan tanto como queramos a un valor común.

La integral como área

Si f es una función *continua y positiva* en $[a,b]$, se verifica que las sumas superiores e inferiores se aproximan tanto como queramos a un valor común.Es decir, *hay un único número* S con la propiedad de que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se verifica que

$$I(f,P) \leqslant S \leqslant S(f,P)$$

La integral como área

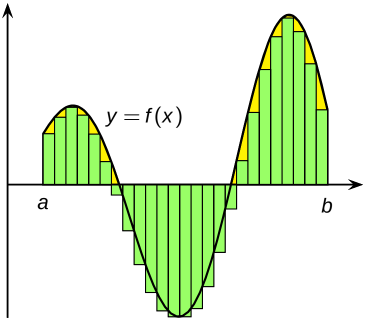
Si f es una función *continua y positiva* en $[a,b]$, se verifica que las sumas superiores e inferiores se aproximan tanto como queramos a un valor común.Es decir, *hay un único número* S con la propiedad de que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se verifica que

$$I(f,P) \leqslant S \leqslant S(f,P)$$

Dicho número es, por definición, el **valor del área** del conjunto $G(f,a,b)$, y escribimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S}$$

Cuando la función f toma valores positivos y negativos, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la parte de $G(f,a,b)$ que está en el semiplano superior (donde f es positiva) menos el área de la parte de $G(f,a,b)$ que está en el semiplano inferior (donde f es negativa), y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto*.



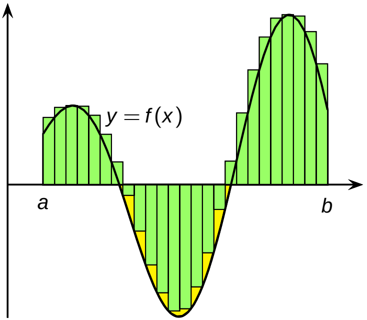
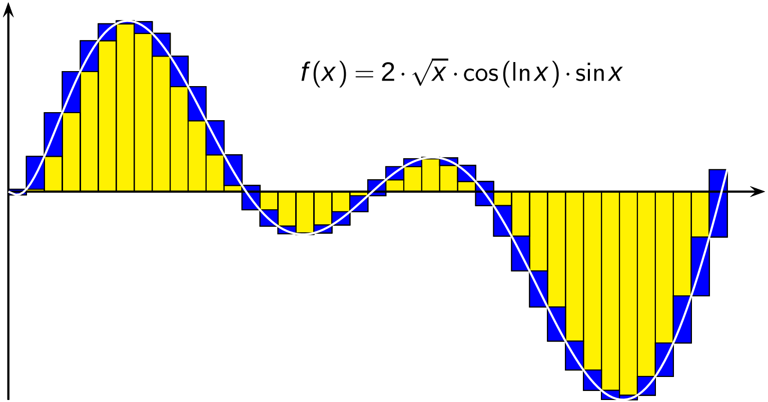


Figure: Aproximación del área por sumas inferiores y superiores


$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\ln x) \cdot \sin x$

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$.

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$.

La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f.

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$.

La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f.

Como consecuencia de las definiciones dadas $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$.

La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f.

Como consecuencia de las definiciones dadas $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Si f es continua también f^+ y f^- son continuas.

Partes positiva y negativa de una función

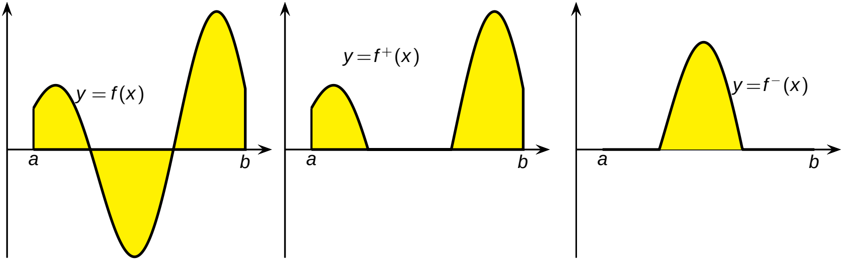


Figure: Partes positiva y negativa de una función

La integral como área con signo

En el caso general en que la función continua f tome valores positivos y negativos se define la integral de f en $[a,b]$ como el número:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x}$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, elegimos en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, elegimos en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.El número

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama **una** *suma de Riemann* de f para la partición P.

Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, elegimos en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.El número

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama **una** *suma de Riemann* de f para la partición P.
Puesto que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es $m_k \leqslant f(t_k) \leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P se verifica que

$$I(f,P) \leqslant \sigma(f,P) \leqslant S(f,P)$$

Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, elegimos en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.El número

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama **una** *suma de Riemann* de f para la partición P.
Puesto que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es $m_k \leqslant f(t_k) \leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P se verifica que

$$I(f,P) \leqslant \sigma(f,P) \leqslant S(f,P)$$

Teorema de convergencia de las sumas integrales. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la partición P_n de $[a,b]$ definida por los puntos $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y sea $\sigma(f,P_n)$ una suma de Riemann para P_n. Entonces se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Convenio. A veces hay que considerar integrales de la forma $\int_{u}^{v} f(t)\,\mathrm{d}t$ donde u y v son puntos de un intervalo. El convenio que se hace es que:

$$\int_{u}^{v} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{v}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Convenio. A veces hay que considerar integrales de la forma $\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t$ donde u y v son puntos de un intervalo. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I, a un punto de I, y definamos $F : I \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in I \tag{2}$$

Entonces F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Convenio. A veces hay que considerar integrales de la forma $\int_u^v f(t)\,dt$ donde u y v son puntos de un intervalo. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,dt = -\int_v^u f(t)\,dt$$

Teorema Fundamental del Cálculo. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I, a un punto de I, y definamos $F : I \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I \tag{2}$$

Entonces F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Observación importante. *En la igualdad (2) la variable es x – el límite superior de la integral. Por eso, es obligado no usar la misma letra x como variable de la función f en el integrando. $F(x)$ es la integral de la función f en el intervalo $[a,x]$.*

Regla de Barrow

Dada un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

Regla de Barrow

Dada un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

El teorema fundamental del Cálculo nos dice que **toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo**.

Regla de Barrow

Dada un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

El teorema fundamental del Cálculo nos dice que **toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo**.

La Regla de Barrow es la herramienta principal para calcular integrales. Dice así:

Regla de Barrow

Dada un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

El teorema fundamental del Cálculo nos dice que **toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo**.

La Regla de Barrow es la herramienta principal para calcular integrales. Dice así:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y supongamos que F es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tenemos que:

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Integrales impropias de Riemann

Sea $f :]a,c] \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponemos que $a < c$ o bien $a = -\infty$. La integral impropia de f en $]a,c]$ se define por:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sea $f : [b,d[\to \mathbb{R}$ una función continua. Suponemos que $b < d$ o bien $d = +\infty$. La integral impropia de f en $[b,d[$ se define por:

$$\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to d} \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cuando el correspondiente límite existe y es un número real, se dice que la integral de f es convergente.

Integrales impropias de Riemann

Sea $f :]a,c] \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponemos que $a < c$ o bien $a = -\infty$. La integral impropia de f en $]a,c]$ se define por:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sea $f : [b,d[\to \mathbb{R}$ una función continua. Suponemos que $b < d$ o bien $d = +\infty$. La integral impropia de f en $[b,d[$ se define por:

$$\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to d} \int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cuando el correspondiente límite existe y es un número real, se dice que la integral de f es convergente.

Las integrales impropias de la forma $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ *donde P y Q son funciones polinómicas con $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geqslant a$ y* $\mathrm{grado}(Q) \geqslant \mathrm{grado}(P) + 2$ *son convergentes*.

Cálculo de primitivas

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Cálculo de primitivas

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Cálculo de primitivas

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se llama a veces *"integral definida"* de f (*y es un número*).

Cálculo de primitivas

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se llama a veces *"integral definida"* de f (*y es un número*).
El símbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama también *"integral indefinida"* o, simplemente, *"integral"* de f (y *representa una primitiva cualquiera* de f).

Variable de integración

En los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.

Variable de integración

En los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.Esto es muy útil si la función f contiene parámetros.

Variable de integración

En los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.Esto es muy útil si la función f contiene parámetros.Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Variable de integración

En los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.Esto es muy útil si la función f contiene parámetros.Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, que es útil para mecanizar algunos cálculos, pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Algunas primitivas inmediatas

$$\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln(f(x)), & \text{si } f(x) > 0; \\ \ln(-f(x)), & \text{si } f(x) < 0. \end{array} \right\} = \ln(|f(x)|)$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}$$

$$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x)\,dx = -\cos(f(x))$$

$$\int \cos(f(x)) f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x))$$

$$\int \sec(f(x)) f'(x)\,dx = \ln\left|\sec(f(x)) + \operatorname{tg}(f(x))\right|$$

$$\int \operatorname{cosec}(f(x)) f'(x)\,dx = \ln\left|\operatorname{cosec}(f(x)) - \operatorname{cotg}(f(x))\right|$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} \frac{f(x)}{a}$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Y para integrales definidas:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Casos en que se usa la integración por partes

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Casos en que se usa la integración por partes

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

Casos en que se usa la integración por partes

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades.

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades.
Las expresiones así obtenidas se llaman **fórmulas de reducción o de recurrencia** y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro. Los siguientes ejemplos son ilustrativos de esta forma de proceder.

Ejemplos de integración por recurrencia

$$I_n = \int (\ln x)^n dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^n \to du = n \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right] =$$

$$= x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

Ejemplos de integración por recurrencia

$$I_n = \int (\ln x)^n dx = \begin{bmatrix} u = (\ln x)^n \to du = n\dfrac{(\ln x)^{n-1}}{x} dx \\ dv = dx \to v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^{ax}\, dx = \begin{bmatrix} u = x^n \to du = n\, x^{n-1} \\ dv = \mathrm{e}^{ax}\, dx \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} dx \end{bmatrix} = \frac{1}{a}(x^n \mathrm{e}^{ax} - n\, I_{n-1})$$

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c), \ b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c), \ b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t), \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c), \ b = g(d) \end{bmatrix} = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} x = g(t), & \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c), & b = g(d) \end{matrix}\right] = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{matrix} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)dt \end{matrix}\right] = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Pueden hacerse cambios de variable en integrales impropias. Incluso puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una *“integral corriente”* obtengamos una *“integral impropia”*.

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q.

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q.

Por tanto, *supondremos que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es 1.*

Descomposición en fracciones simples

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *“fracciones simples”*.

Descomposición en fracciones simples

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *“fracciones simples”*.

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles lineales $x-\alpha$ y cuadráticos x^2+bx+c sin raíces reales ($b^2-4c<0$). Estos factores puede aparecer repetidos.

Descomposición en fracciones simples

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*.

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles lineales $x-\alpha$ y cuadráticos x^2+bx+c sin raíces reales ($b^2-4c<0$). Estos factores puede aparecer repetidos.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Descomposición en fracciones simples

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*.

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles lineales $x-\alpha$ y cuadráticos x^2+bx+c sin raíces reales ($b^2-4c<0$). Estos factores puede aparecer repetidos.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$.

Método de los coeficientes indeterminados

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Método de los coeficientes indeterminados

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada raíz real α de $Q(x)$ de multiplicidad k debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada raíz real α de $Q(x)$ de multiplicidad k debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Para cada raíz compleja de multiplicidad p debemos poner una suma de p fracciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j} \qquad (b^2-4c<0)$$

Método de los coeficientes indeterminados

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada raíz real α de $Q(x)$ de multiplicidad k debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Para cada raíz compleja de multiplicidad p debemos poner una suma de p fracciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j} \qquad (b^2-4c<0)$$

Los coeficientes A_j, B_j, C_j se calculan reduciendo a común denominador e identificando numeradores.

Sólo nos queda calcular las integrales que hemos dejado pendientes:

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a|$.
- $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$ donde $b^2-4c<0$. Siempre se puede escribir

$x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$ con $k>0$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Bx+C}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{B(x-d)+C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{B(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{B}{2}\ln\left((x-d)^2+k^2\right) + (C+Bd)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)^2+k^2} = \\ &= \frac{B}{2}\ln\left((x-d)^2+k^2\right) + \frac{C+Bd}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-d}{k}\right).\end{aligned}$$

Aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

Aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

- Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes

a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues

- $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$

Aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

• Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues

• $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$.

• Fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant 2$, correspondientes a raíces imaginarias múltiples, la integración de las cuales puede hacerse mediante una fórmula de recurrencia.

Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales.

Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales.

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *"integración por racionalización"*.

Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales.

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha *racionalizado* y esta técnica se conoce como *“integración por racionalización”*.

En lo que sigue, representaremos por $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables.

Integración de funciones “racionales–trigonométricas"

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Integración de funciones “racionales–trigonométricas"

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R = R(x,y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Casos particulares

- Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

Casos particulares

- Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \ \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen}x,-\cos x)=R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg}x=t$. Con lo que

$$\operatorname{sen}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \mathrm{d}x=\frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x\,\cos^m x\ \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\qquad \operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen}x,\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x=t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen}x,-\cos x)=-R(\operatorname{sen}x,\cos x)$ se dice que *"R es impar en coseno"* y el cambio $\operatorname{sen}x=t$ suele ser eficaz.

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo I

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I.

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo I

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I.Su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo I

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo I.Su área viene dada por

$$\lambda(\Omega) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

Cuando la función $f - g$ no tiene signo constante en el intervalo $[a, b]$, para calcular esta integral se descompone dicho intervalo en intervalos en los que la función $f - g$ es siempre positiva o siempre negativa, lo que permite quitar el valor absoluto en el integrando.

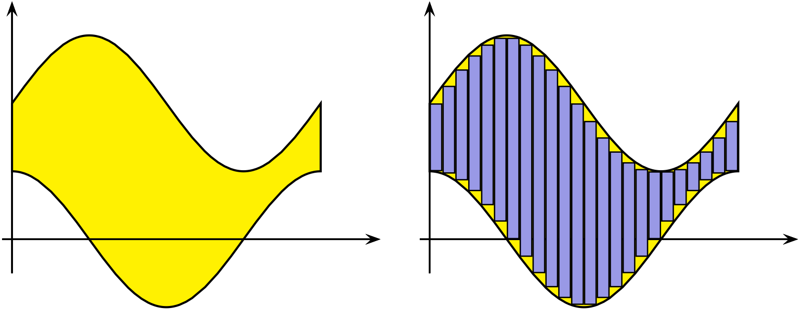


Figure: Aproximación al área de una región de tipo I

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

La distinción entre regiones de tipo I y tipo II es una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto.

Cálculo de áreas planas. Regiones de tipo II

Supongamos que f, g son funciones continuas y llamemos Ω a la región del plano comprendida entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ para $a \leqslant y \leqslant b$. Se dice que Ω es una región de tipo II.Su área viene dada por

$$\int_a^b |f(y) - g(y)| \,\mathrm{d}y$$

La distinción entre regiones de tipo I y tipo II es una cuestión de conveniencia. No son conjuntos de distinta naturaleza sino formas distintas de describir un conjunto.Con frecuencia una región puede considerarse tanto de tipo I como de tipo II y hay que elegir la descripción que más facilite el cálculo de la correspondiente integral.

Cálculo de áreas planas

Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.

Cálculo de áreas planas

Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.Geométricamente, lo que hacemos es una simetría respecto a la recta $y = x$, lo que deja invariante el área.

Cálculo de áreas planas

Basta cambiar la variable x por la variable y para convertir una región de tipo II en otra de tipo I.Geométricamente, lo que hacemos es una simetría respecto a la recta $y = x$, lo que deja invariante el área.Por tanto, si en un ejercicio resulta conveniente considerar la región cuya área quieres calcular como una región de tipo II y te encuentras más cómodo trabajando con regiones de tipo I, basta con que cambies los nombres de las variables.

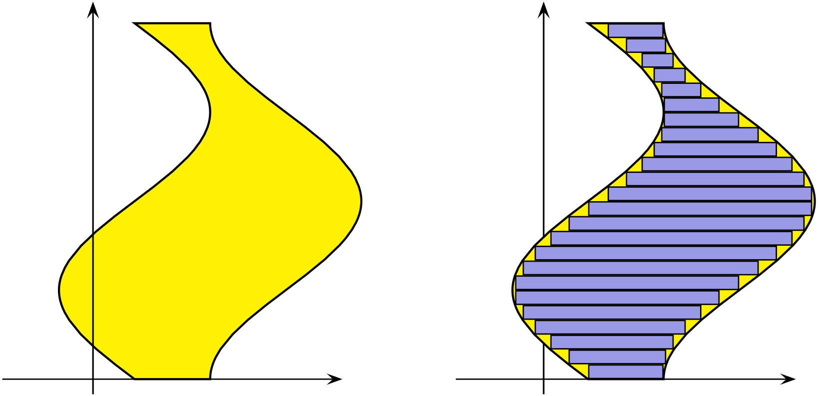


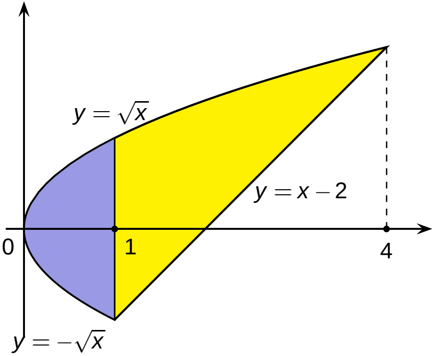
Figure: Aproximación al área de una región de tipo II

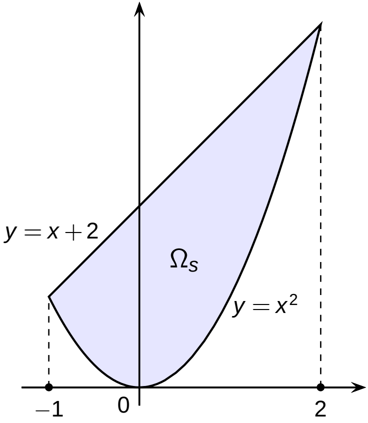
Ejemplo

Calcula el área de la región Ω comprendida entre la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = x - 2$ considerando que dicha región es:

a) De tipo I.

b) De tipo II.




$y = x + 2$
Ω_S
$y = x^2$
-1
0
2

Longitud de un arco de curva

La longitud de una curva dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Longitud de un arco de curva

La longitud de una curva dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

Para el caso particular de que la curva sea la gráfica de una función $y = f(x)$, esto es $\gamma(x) = (x, f(x))$, entonces su longitud viene dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

Cálculo de volúmenes

Volumen de un cuerpo de revolución. Los cuerpos de revolución son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana alrededor de una recta llamada eje de giro.

Cálculo de volúmenes

Volumen de un cuerpo de revolución. Los cuerpos de revolución son regiones de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen girando una región plana alrededor de una recta llamada eje de giro.Vamos a considerar varios casos particulares de sólidos de revolución en los que las secciones por planos perpendiculares al eje de giro van a ser círculos o coronas circulares.

Método de los discos o de las arandelas

En este método se consideran secciones perpendiculares al eje de giro. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Girando la región del plano comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, alrededor del eje OX obtenemos un sólido de revolución Ω cuyo volumen viene dado por:

$$Vol(\Omega)=\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

El volumen del sólido de revolución, Ω, obtenido girando alrededor del eje OX una región de tipo I definida por dos funciones continuas $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tales que $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, se obtiene integrando las áreas de las coronas circulares o arandelas de radio interior $f(x)$ y radio exterior $g(x)$, obtenidas al cortar Ω por un plano perpendicular al eje OX en el punto $(x,0,0)$.

$$Vol(\Omega)=\pi\int_a^b (g(x)^2-f(x)^2)\,\mathrm{d}x$$

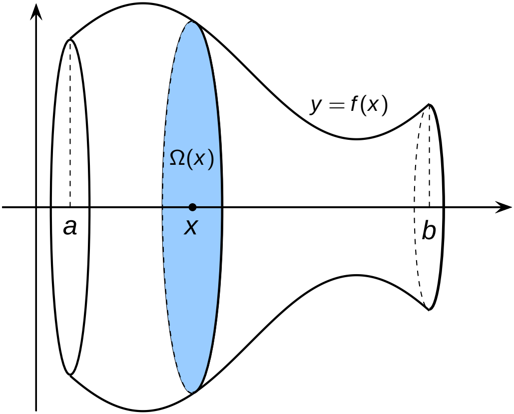


Figure: Método de los discos

Método de los discos o de las arandelas

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c,d]$, es decir, R es la región

$$R = \{(x,y) : y \in [c,d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

Método de los discos o de las arandelas

Consideremos ahora un sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje OY una región R de tipo II, definida por dos funciones continuas $\varphi, \psi \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ tales que $0 \leqslant \varphi(y) \leqslant \psi(y)$ para todo $y \in [c,d]$, es decir, R es la región

$$R = \{(x,y) : y \in [c,d], \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

El volumen del sólido de revolución resultante, Ω, viene dado por:

$$Vol(\Omega) = \pi \int_c^d (\psi(y)^2 - \varphi(y)^2)\, dy$$

Método de las láminas o de los tubos

En este método se consideran secciones paralelas al eje de giro. Consideremos una función positiva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y la región $G(f,a,b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x=a$, $x=b$. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega)=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Método de las láminas o de los tubos

En este método se consideran secciones paralelas al eje de giro. Consideremos una función positiva $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y la región $G(f,a,b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esto es lo que se conoce como *método de las láminas o de las capas o de los tubos*. Puedes adaptar fácilmente esta expresión para el caso de que el eje de giro sea la recta vertical $x = c$.

Método de las láminas o de los tubos

En este método se consideran secciones paralelas al eje de giro. Consideremos una función positiva $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y la región $G(f,a,b)$ limitada por la gráfica de dicha función y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Girando dicha región alrededor del eje OY obtenemos un sólido de revolución, Ω, cuyo volumen viene dado por

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Esto es lo que se conoce como *método de las láminas o de las capas o de los tubos*. Puedes adaptar fácilmente esta expresión para el caso de que el eje de giro sea la recta vertical $x = c$.En general, si notamos por $R(x)$ la distancia del punto $(x,0)$ al eje de giro, entonces:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_a^b R(x) f(x)\, \mathrm{d}x$$

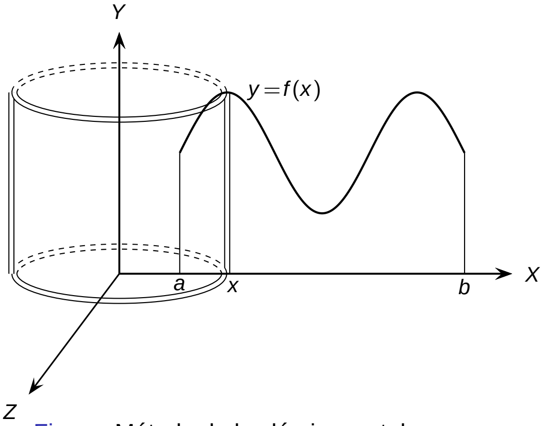


Figure: Método de las láminas o tubos

Cálculo de áreas de superficies de revolución

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función con derivada primera continua. Girando la gráfica de dicha función alrededor del eje OX obtenemos una superficie de revolución, Γ cuya área viene dada por:

$$\lambda(\Gamma)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$