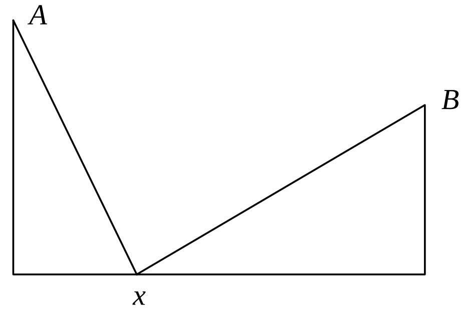
Soluciones de los ejercicios del examen de Análisis Matemático
Primer curso de Ingeniería Informática - Febrero de 2005

Ejercicio 1.



Dados los puntos $A=(0,3)$ y $B=(2,2)$, calcula el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto $(x,0)$ del eje de abscisas. Debes de justificar que el mínimo calculado es un mínimo absoluto.

Solución.
Hay que calcular el mínimo absoluto de la función

$$f(x)=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(x-2)^2+4}$$

en el intervalo $[0,2]$.

Como la función f es continua y $[0,2]$ es un intervalo cerrado y acotado, el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass nos asegura que tiene que haber algún punto $x_0\in[0,2]$ en el cual la función f tiene un mínimo absoluto en $[0,2]$, es decir, $f(x_0)\leqslant f(x)$ para todo $x\in[0,2]$. Dicho punto x_0 es el que debemos calcular. El punto x_0 puede ser uno de los extremos del intervalo o un punto interior del intervalo.

Como la función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, es derivable en $]0,2[$ los extremos relativos de f en $]0,2[$ deben ser ceros de la derivada f'. Tenemos que

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=\frac{x\sqrt{(x-2)^2+4}+(x-2)\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}\sqrt{(x-2)^2+4}}$$

Por tanto, los ceros de la derivada son los puntos que verifican la igualdad

$$\begin{aligned}
x\sqrt{(x-2)^2+4}=(2-x)\sqrt{x^2+9} \quad &\Longrightarrow \quad x^2\big((x-2)^2+4\big)=(x-2)^2(x^2+9) \Longrightarrow\\
x^2(x-2)^2+4x^2=(x-2)^2x^2+9(x-2)^2 \quad &\Longrightarrow \quad 4x^2=9(x-2)^2 \Longrightarrow 5x^2-36x+36=0 \Longrightarrow\\
x=\frac{36\pm\sqrt{36^2-20\times 36}}{10} \quad &= \quad \frac{36\pm\sqrt{36\times 16}}{10}=\frac{36\pm 24}{10}
\end{aligned}$$

Obtenemos así que la derivada se anula en el punto $x=6$ que queda fuera del intervalo $[0,2]$ y no nos interesa, y en el punto $x_0=6/5\in[0,2]$. Para ver si en este punto hay un extremo absoluto de f en $[0,2]$ estudiaremos la variación de f' en dicho intervalo.

Como para todo $x\in[0,x_0[$ y para todo $x\in]x_0,2]$ se tiene que $f'(x)\neq 0$, y f' es continua, el teorema de Bolzano implica que f' tiene signo constante en cada uno de esos intervalos. Como $f'(0)<0$ y $f'(2)>0$ se sigue que

$$\begin{aligned}
f'(x)<0 \text{ para todo } x\in[0,x_0[\quad &\Longrightarrow \quad f \text{ es estrictamente decreciente en } [0,x_0]\\
f'(x)>0 \text{ para todo } x\in]x_0,2] \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ es estrictamente creciente en } [x_0,2]
\end{aligned}$$

Tenemos por tanto que:

$$x\in[0,2] \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\in[0,x_0] \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) \\ x\in[x_0,2] \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(x) \end{array} \right\} \Longrightarrow f(x_0) \leqslant f(x)$$

Hemos probado así que la función f alcanza un mínimo absoluto en $[0,2]$ en el punto $x_0 = 6/5$.

Ejercicio 2. Sea $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Calcula razonadamente $F'(x)$, para $x\in\mathbb{R}$.

b) Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2}$.

c) Calcula una aproximación de $F(1/2) = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ mediante $P_4(1/2)$, donde $P_4(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de F en $a=0$.

Solución.

a) Como la función $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}$, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

b) Usando la regla de L'Hôpital, puesto que se trata de una indeterminación del tipo $0/0$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x} = 0$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}-1}{x}$$

es, por definición, la derivada en $a=0$ de la función $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ y, por tanto, es igual a $f'(0) = 0$. Alternativamente, puede aplicarse otra vez la regla de L'Hôpital para calcular dicho límite porque sigue siendo una indeterminación del tipo $0/0$.

c) Tenemos que

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad F''(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad F'''(x) = (-2+4x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}, \quad F^{(4)}(x) = (12x-8x^3)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Como

$$P_4(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!} + \frac{F^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{3}$$

Obtenemos fácilmente que $P_4(1/2) = \dfrac{11}{24}$ que es la aproximación pedida.

Ejercicio 3. Sea Γ la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=1$. Calcula los puntos de Γ que están más cerca y más lejos del punto $(1,2,3)$. Justifica que los resultados obtenidos son valores máximos y mínimos absolutos.

Solución. Se trata, claro está, de un problema de extremos condicionados pues nos piden calcular el mínimo y el máximo absolutos de la función $\sqrt{(x-1)^2+(x-2)^2+(z-3)^2}$, que nos da la distancia de un punto (x,y,z) al punto $(1,2,3)$, cuando el punto (x,y,z) está en la circunferencia intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2-1=0$ con el plano $x+y+z-1=0$. A efectos de cálculo, podemos ignorar la raíz cuadrada y considerar la función

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(x-2)^2+(z-3)^2$$

Tenemos dos condiciones. Formamos la función de Lagrange.

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=(x-1)^2+(x-2)^2+(z-3)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z-1)$$

Calculamos los puntos críticos de la función de Lagrange.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x-1)+2\lambda x+\mu=0 && (1)\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y-2)+2\lambda y+\mu=0 && (2)\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2(z-3)+2\lambda z+\mu=0 && (3)\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2+y^2+z^2-1=0 && (4)\\
\frac{\partial F}{\partial \mu} &= x+y+z-1=0 && (5)
\end{aligned}$$

Haciendo la diferencia entre las ecuaciones (1) y (2), y entre las (2) y (3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
(x-y)(2\lambda+2)+2 &= 0\\
(y-z)(2\lambda+2)+2 &= 0
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican que $2\lambda+2\neq 0$ y también que $(x-y)(2\lambda+2)=(y-z)(2\lambda+2)$, por lo que obtenemos que $x-y=y-z$, es decir, $x=2y-z$. Sustituyendo esta igualdad en la ecuación (5), resulta $3y-1=0$, por lo que $y=1/3$. Por tanto la ecuación (5) implica que $x+z=2/3$, esto es, $z=2/3-x$. Sustituyendo en la ecuación (4) obtenemos que

$$x^2+\frac{1}{9}+(2/3-x)^2=0 \iff 9x^2-6x-2=0 \Longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$$

Conocido el valor de x calculamos z por la igualdad $z=2/3-x$. Obtenemos así los puntos

$$A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right), \qquad B=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$$

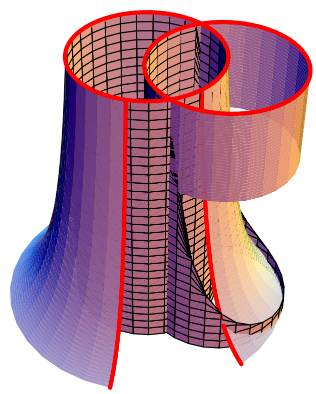
Como la función f es continua y la curva Γ es un conjunto cerrado (coincide con su frontera) y acotado (está contenido en la esfera unidad), es decir, Γ es un compacto en $\mathbb{R}^3$, el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos asegura que tiene que haber puntos en Γ donde la función f alcance un máximo y un mínimo absolutos. Sabemos también, por el teorema de Lagrange para el cálculo de extremos condicionados, que dichos extremos deben ser puntos críticos de la función de Lagrange. Concluimos que los puntos buscados tiene que ser necesariamente los puntos A y B. Para saber cuál de ellos es el máximo y cuál es el mínimo absolutos evaluamos la función an ambos puntos y obtenemos

$$f(A) = 11 + \frac{4}{\sqrt{3}}, \qquad f(B) = 11 - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Concluimos que en el punto A es el punto de Γ que está más lejos del punto $(1,2,3)$ y el punto B es el punto de Γ que está más cerca del punto $(1,2,3)$.

Ejercicio 4. Calcula el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ situada sobre el plano XY, que queda bajo la gráfica de la función $z = \dfrac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, es interior al cilindro $(x-1)^2+y^2=1$ y exterior al cilindro $x^2+y^2=1$.

Solución. Representemos con la letra Ω la región de $\mathbb{R}^3$ que se describe en el enunciado. Dicha región



es un conjunto de tipo I en $\mathbb{R}^3$ pues, representando por A el conjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leqslant 1,\ x^2+y^2 \geqslant 1\right\} \qquad \text{(proyección de } \Omega \text{ sobre el plano } XY\text{)}$$

tenemos que

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A, 0 \leqslant z \leqslant \frac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right\}$$

Por tanto el volumen de Ω viene dado por la integral

$$I = \iint\limits_A \frac{4-x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

la cual se calcula fácilmente. Pasando a coordenadas polares tenemos que

$$I = \iint\limits_B \frac{4-\rho^2}{\rho^3}\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \iint\limits_B \left(\frac{4}{\rho}-1\right)\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

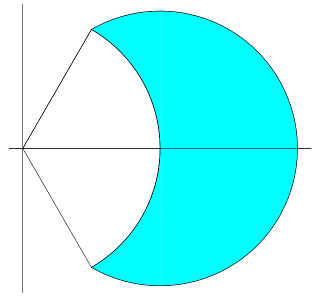


Figura 1: El conjunto A

donde B es el conjunto dado por

$$B = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[: (\rho\cos\vartheta,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\in A\right\} = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[: 1\leqslant\rho\leqslant 2\cos\vartheta\right\} =$$
$$= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[: 1\leqslant\rho\leqslant 2\cos\vartheta,\ \cos\vartheta\geqslant 1/2\right\} =$$
$$= \{(\rho,\vartheta) : 1\leqslant\rho\leqslant 2\cos\vartheta,\ -\pi/3\leqslant\vartheta\leqslant\pi/3\}$$

Por tanto

$$\iint\limits_B \left(\frac{4}{\rho}-1\right) \mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\int_1^{2\cos\vartheta} \left(\frac{4}{\rho}-1\right) \mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\vartheta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[1-2\cos\vartheta-\frac{4}{\rho}\right]_{\rho=1}^{\rho=2\cos\vartheta} \mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(5-2\cos\vartheta-\frac{2}{\cos\vartheta}\right) \mathrm{d}\vartheta = \frac{10\pi}{3}-2\sqrt{3}-2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta$$

Todo lo que queda es calcular la integral última. Se trata de una típica y sencilla integral racional trigonométrica que es impar en coseno. Sabemos que el cambio de variable $\mathrm{sen}\,\vartheta = t$ la racionaliza. Aprovechamos también que la función coseno es par.

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = 2\int_0^{\pi/3} \frac{\cos\vartheta}{\cos^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta = 2\int_0^{\pi/3} \frac{\cos\vartheta}{1-\mathrm{sen}^2(\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= [\mathrm{sen}\,\vartheta = t] = 2\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right) \mathrm{d}u =$$
$$= \left[\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{u=0}^{u=\sqrt{3}/2} = \log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

Finalmente obtenemos

$$I = \frac{10\pi}{3}-2\sqrt{3}-2\log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$