Análisis Matemático

Ingenierías en Informática

Soluciones del examen de febrero de 2009

1. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$ se anula en al menos tres puntos del intervalo $[-3, 3]$.

   b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

   Solución. El teorema de Bolzano afirma que una función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula al menos una vez en algún punto de dicho intervalo. La función f es continua, y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&f(-3) = \mathrm{e}^{-3} - 27 + 18 - 2 = \mathrm{e}^{-3} - 11 < 0\\
&f(-2) = \mathrm{e}^{-2} - 8 + 12 - 2 = \mathrm{e}^{-2} + 2 > 0\\
&f(0) = 1 - 2 = -1 < 0\\
&f(3) = \mathrm{e}^{3} + 27 - 18 - 2 = \mathrm{e}^{3} + 7 > 0
\end{aligned}
$$

   Deducimos, por el teorema de Bolzano, que en cada uno de los intervalos $]-3, -2[$, $]-2, 0[$ y $]0, 3[$ la función f se anula por lo menos en un punto. En consecuencia, la función se anula en al menos tres puntos en $[-3, 3]$.

2. Por el teorema de Rolle, sabemos que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay algún cero de su derivada. Por tanto, si nuestra función f se anulara en más de tres puntos, es decir, se anulara en cuatro puntos o más, su derivada habría de anularse en al menos tres puntos y, por igual razón, su derivada segunda habría de anularse en al menos dos puntos. Pero como $f''(x) = \mathrm{e}^x + 6x$, es evidente que f'' es una función estrictamente creciente, por lo que solamente puede anularse en un punto. Concluimos que f no se puede anular en más de tres puntos. ☺

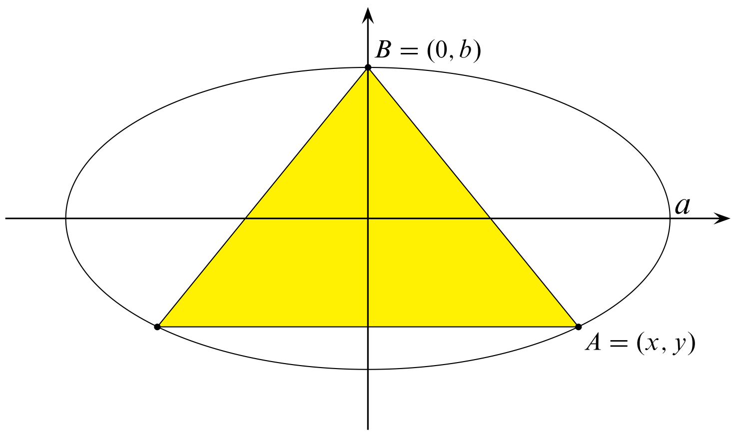
3. Se considera la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto $(0, b)$ y base paralela al eje de abscisas.

   Solución. Sea $A = (x, y)$ el vértice izquierdo de la base del triángulo. La altura del triángulo es $b - y$, y la base es el doble de la abscisa x. Puesto que el punto $A = (x, y)$ está en la elipse, se tiene que $x = a\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}$. Por tanto, la función área que hay que maximizar es:

$$
f(y) = \frac{1}{2}(b - y)2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{a}{b}(b - y)\sqrt{b^2 - y^2} \qquad y \in [-b, b].
$$

Se trata de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[-b, b]$. Sabemos, por el teorema de Weierstrass, que dicha función alcanza un máximo (y un mínimo) absoluto en algún punto de dicho intervalo. Como la función f es derivable en $]-b, b[$, dicho máximo absoluto o bien se alcanza en alguno de los extremos del intervalo o se alcanza en algún punto crítico de f. Calculemos los puntos críticos de f en $]-b, b[$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{a}{b}\left(-\sqrt{b^2 - y^2} + (b - y)\frac{-y}{\sqrt{b^2 - y^2}}\right) = \frac{a}{b}\frac{2y^2 - by - b^2}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$



La única solución de la ecuación $2b^2 - by - b^2 = 0$ que está en el intervalo $[-b, b]$ es $y = -b/2$. Como:

$$f(b) = 0$$
$$f(-b/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$
$$f(-b) = 0$$

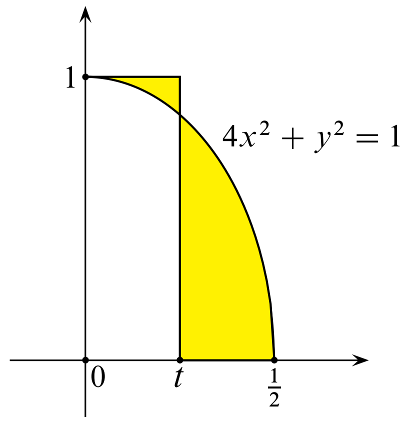
Deducimos que el triángulo de área máxima en las condiciones del enunciado es aquél cuya base está sobre la recta $y = -b/2$, y el área máxima es $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$. ☺

4. Sea $A(t)$ el área de la región del plano (sombreada en gris en la figura) comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. Se pide calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, 1/2]$.

   Solución. La función área, $A : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, que se nos pide optimizar viene dada por:

$$A(t) = \int_0^t (1 - \sqrt{1 - 4x^2})\, dx + \int_t^{1/2} \sqrt{1 - 4x^2}\, dx = \int_0^t (1 - \sqrt{1 - 4x^2})\, dx - \int_{1/2}^t \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$$

Se trata de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[0, 1/2]$. Sabemos, por el teorema de Weierstrass, que dicha función alcanza un máximo y un mínimo absolutos en algún punto de dicho intervalo. Como la función integrando es continua,



el teorema fundamental del cálculo, nos dice que $A(t)$ es derivable y su derivada viene dada por:

$$A'(t) = 1 - \sqrt{1-4t^2} - \sqrt{1-4t^2} = 1 - 2\sqrt{1-4t^2}.$$

Calculamos los puntos críticos:

$$A'(t) = 0 \iff 2\sqrt{1-4t^2} = 1 \iff 1 - 4t^2 = \frac{1}{4} \iff t^2 = \frac{3}{16}.$$

Deducimos que el único punto donde $A'(t)$ se anula en el intervalo $]0, 1/2[$ es $\sqrt{3}/4$. Los valores máximo y mínimo absolutos de la función deben alcanzarse o bien en un punto extremo del intervalo o en el punto $\sqrt{3}/4$. Puesto que la derivada $A'(t)$ es continua, no se anula en $[0, \sqrt{3}/4[$ y $A'(0) = -1 < 0$, deducimos que $A'(t) < 0$ para todo $t \in [0, \sqrt{3}/4[$. Análogamente, como $A'(1/2) = 1 > 0$, deducimos que $A'(t) > 0$ para todo $t \in]\sqrt{3}/4, 1/2]$. Por tanto, deducimos que la función $A(t)$ es decreciente en $[0, \sqrt{3}/4]$ y es creciente en $[\sqrt{3}/4, 1/2]$. En consecuencia, el valor mínimo absoluto se alcanza en $\sqrt{3}/4$. El máximo absoluto debe alcanzarse, por tanto, en uno de los puntos extremos del intervalo. El ejercicio nos pide calcular dichos valores. Tenemos que:

$$A(0) = \int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}$$

$$A(1/2) = \int_0^{1/2} (1 - \sqrt{1-4x^2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$A(\sqrt{3}/4) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} (1 - \sqrt{1-4x^2})\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{1/2} \sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}$$

El valor máximo absoluto se alcanza en $t = 0$ con valor $\frac{\pi}{8}$ y el valor mínimo absoluto en $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$ con valor $\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}$. ☺

5. a) Clasifica los extremos relativos del campo escalar $f(x,y)=x^3+y^3-xy^2-x+16$.

   b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 2,\ \ y\geqslant 0\right\}.$$

Solución. a) Calculamos los puntos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-y^2-1=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-2xy=y(3y-2x)=0$$

De la segunda tenemos dos posibilidades: $y=0$ o $3y-2x=0$. Supongamos que $y=0$, entonces en la primera sustituimos y tenemos que:

$$x^2=1/3 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Supongamos ahora que $y\neq 0$, por tanto $3y-2x=0$. Observa que la primera ecuación implica que $x\neq 0$, por lo que $y=\frac{2x}{3}$. Volvemos a la primera ecuación y sustituimos:

$$3x^2-\frac{4x^2}{9}=1 \iff 23x^2=9 \iff x=\pm\frac{3}{\sqrt{23}}.$$

Por tanto, los puntos críticos de f son:

$$(\frac{1}{\sqrt{3}},0),\ (\frac{-1}{\sqrt{3}},0),\ (\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}}),\ (\frac{-3}{\sqrt{23}},\frac{-2}{\sqrt{23}}).$$

Calculamos ahora la matriz hessiana :

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 6y-2x \end{pmatrix}$$

Evaluamos dicha matriz en cada punto crítico.

$$H(\frac{1}{\sqrt{3}},0)=\begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Como su determinante es negativo, en $(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$ hay un punto de silla.

$$H(-\frac{1}{\sqrt{3}},0)=\begin{pmatrix} \frac{-6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Como su determinante es negativo, en en $(\frac{-1}{\sqrt{3}},0)$ hay un punto de silla.

$$H(\frac{3}{\sqrt{23}},\frac{2}{\sqrt{23}})=\begin{pmatrix} \frac{18}{\sqrt{23}} & \frac{-4}{\sqrt{23}} \\ \frac{-4}{\sqrt{23}} & \frac{6}{\sqrt{23}} \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es positivo y su primer elemento también es positivo. Por tanto en $(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}})$ hay un mínimo relativo.

$$H(\frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-2}{\sqrt{23}}) = \begin{pmatrix} \frac{-18}{\sqrt{23}} & \frac{4}{\sqrt{23}} \\ \frac{4}{\sqrt{23}} & \frac{-6}{\sqrt{23}} \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es positivo y su primer elemento es negativo. Por tanto, en el punto $(\frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-2}{\sqrt{23}})$ hay un máximo relativo.

b) El conjunto K es la mitad superior del círculo centrado en el origen de radio $\sqrt{2}$. Es un conjunto acotado y contiene a su frontera por lo que también es cerrado, es decir, K es un conjunto compacto. Como f es un campo escalar continuo, por el teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza puntos de K un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Dichos puntos pueden estar en el interior de K o en la frontera.

Si se alcanzan en el interior de K, han de estar entre los extremos relativos que hay en el interior de K. Así que nos quedamos con sólo el tercer punto del apartado anterior, es decir, $(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}})$. El otro extremo relativo que habíamos obtenido, lo descartamos ya que no está en el interior del recinto K.

La frontera de K está formada por el segmento $K_1 = \left\{(x, 0) : -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right\}$ y por la semicircunferencia $K_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2,\ y \geqslant 0\right\}$. Observa que K_1 y K_2 son conjuntos compactos. Calcularemos los extremos absolutos de f en K_1 y en K_2.

Comenzamos con el segmento K_1. Llamemos f_1 a la función f restringida a este conjunto y calculemos sus puntos críticos. Esto es:

$$f_1(x) = f(x, 0) = x^3 - x + 16 \qquad \text{donde } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$
$$f_1'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, los valores extremos absolutos de f en K_1 debe tomarlos en alguno de los puntos $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$ o en los extremos del intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$.

Para calcular los extremos absolutos de f en K_2, observamos que los puntos de K_2 son de la forma $(x, \sqrt{2 - x^2})$, por lo que calcularemos los extremos absolutos de la función (al final del ejercicio también lo haremos aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange):

$$f_2(x) = f(x, \sqrt{2 - x^2}) = 2x^3 + (2 - x^2)^{3/2} - 3x + 16 \qquad \text{donde } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$f_2'(x) = 6x^2 - 3x(2-x^2)^{1/2} - 3 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 1 = x\sqrt{2 - x^2} \Longrightarrow 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0. \quad (1)$$

Es una ecuación bicuadrada que se resuelve fácilmente obteniendo que:

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \quad \text{o} \quad x^2 = 1/5.$$

En principio tendríamos 4 soluciones; pero observa que, como debe ser $2x^2 - 1 = x\sqrt{2-x^2}$, los números $2x^2 - 1$ y x deben ser ambos positivos o ambos negativos. Obtenemos así los puntos críticos de f_2: $x = 1$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Por tanto, los valores extremos absolutos de f en K_2 debe tomarlos en alguno de los puntos $(1,1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$ o en los extremos del intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$.

Para finalizar, evaluamos la función f en todos los puntos candidatos encontrados, tanto en el interior, como en la frontera.

$$
\begin{aligned}
&f(3/\sqrt{23}, 2/\sqrt{23}) = 16 - \frac{2}{\sqrt{23}} \\
&f(\sqrt{2}, 0) = 16 + \sqrt{2} \\
&f(-\sqrt{2}, 0) = 16 - \sqrt{2} \qquad \text{(mínimo absoluto)} \\
&f(1,1) = 16 \\
&f(-1/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5}) = 16 + \frac{8}{\sqrt{5}} \qquad \text{(máximo absoluto)}
\end{aligned}
$$

Método de los multiplicadores de Lagrange. Vamos ahora a encontrar los candidatos a extremos absolutos de f en la semicircunferencia K_2 haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange. Calculamos los extremos de f con la condición $x^2 + y^2 - 2 = 0$ y nos quedaremos con aquellos para los que $y \geqslant 0$. La función de Lagrange es

$$F(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Cuyos puntos críticos son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - y^2 - 1 + 2\lambda x &= 0 \qquad (2) \\
3y^2 - 2xy + 2\lambda y &= 0 \qquad (3) \\
x^2 + y^2 - 2 &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Podemos escribir la ecuación (3) como:

$$y(3y - 2x + 2\lambda) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{cl} y & = 0 \\ 3y - 2x + 2 & = 0 \end{array} \right.$$

Si $y = 0$ la ecuación (4) nos da $x = \pm\sqrt{2}$ (y ahora podemos calcular el valor correspondiente de λ por la ecuación (2), pero eso no interesa). Si $y \neq 0$, debe ser $3y - 2x + 2\lambda = 0$. Y ahora podemos despejar λ en las dos primeras ecuaciones e igualar (observa que la ecuación (2) implica que $x \neq 0$):

$$\frac{2x - 3y}{2} = \frac{y^2 - 3x^2 + 1}{2x} \qquad (5)$$

Ahora en la ecuación (5) sustituimos $y^2 = 2 - x^2$ e $y = \sqrt{2-x^2}$ con lo que obtenemos:

$$2x^2 - 3x\sqrt{2-x^2} = 3 - 4x^2 \iff 2x^2 - 1 = x\sqrt{2-x^2} \Longrightarrow 5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

Que es la misma ecuación (1). En consecuencia volvemos a obtener las mismas soluciones anteriores. ☺

6. Calcula la integral $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$.

   Donde $A=\left\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1,\ |y|\leqslant x\right\}$.

   Solución. El recinto de integración es un sector circular de la circunferencia unidad y la función que integramos tiene simetría polar. Haremos un cambio a coordenadas polares. Tenemos que:

$$\iint_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\operatorname{sen}\vartheta \end{bmatrix} = \iint_B \frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

Donde

$$\begin{aligned} B &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\colon (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in A\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\colon \rho^2\leqslant 1,\ |\rho\operatorname{sen}\vartheta|\leqslant\rho\cos\vartheta\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\colon \rho\leqslant 1,\ |\operatorname{sen}\vartheta|\leqslant\cos\vartheta\right\} \end{aligned}$$

La condición $|\operatorname{sen}\vartheta|\leqslant\cos\vartheta$ implica que $\cos\vartheta>0$, lo que nos dice que $\frac{-\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$ y, además, $-\cos\vartheta\leqslant\operatorname{sen}\vartheta\leqslant\cos\vartheta$. Como $\cos\vartheta>0$, esta desigualdad equivale a $-1\leqslant\operatorname{tg}\vartheta\leqslant 1$, lo que equivale a que $-\pi/4\leqslant\vartheta\leqslant\pi/4$. Por tanto:

$$B=\{(\rho,\vartheta): 0<\rho\leqslant 1,\ -\pi/4\leqslant\vartheta\leqslant\pi/4\}.$$

Aplicamos ahora el teorema de Fubini para obtener:

$$\iint_B \frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^1 \frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho\,.$$

Esta es una integral de una función racional que se calcula por el método usual. Primero, descomponemos en fracciones simples el integrando:

$$\frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)} = \frac{A}{2-\rho}+\frac{B}{2+\rho}+\frac{C\rho+D}{1+\rho^2}$$

Quitando denominadores obtenemos:

$$\rho = A(2+\rho)(1+\rho^2)+B(2-\rho)(1+\rho^2)+(C\rho+D)(2-\rho)(2+\rho)$$

Haciendo $\rho=2$ obtenemos que $2=20A$, por lo que $A=1/10$. Haciendo $\rho=-2$ obtenemos que $B=-1/10$. Igualando coeficientes de ρ^3 resulta $A-B-C=0$, de donde obtenemos que $C=-1/5$. Igualando los términos independientes resulta $2A+2B+4D=0$, por lo que $D=0$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\rho}{(4-\rho^2)(1+\rho^2)}\,\mathrm{d}\rho &= \frac{1}{10}\int_0^1\frac{1}{2-\rho}\,\mathrm{d}\rho - \frac{1}{10}\int_0^1\frac{1}{2+\rho}\,\mathrm{d}\rho + \frac{1}{5}\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \frac{1}{10}\left[-\log(2-\rho)\right]_0^1 - \frac{1}{10}\left[\log(2+\rho)\right]_0^1 + \frac{1}{10}\left[\log(1+\rho^2)\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{10}\log 2 - \frac{1}{10}\log 3 + \frac{1}{10}\log 2 + \frac{1}{10}\log 2 = \frac{1}{10}(3\log 2-\log 3) \end{aligned}$$

Para teminar:

$$\int_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{\pi}{20}\log\left(\frac{8}{3}\right).$$

☺