Departamento de Análisis Matemático

1º de Matemáticas. Examen de Cálculo, julio 2001

Problema 1. (a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=(2-\cos x)^{1/x^2}$, $f(0)=\sqrt{e}$. Calcular $f'(0)$

(b) Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\,\mathrm{sen}\,x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x}$

Problema 2. (a) Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha}$.

(b) Estudiar, según los valores de α, el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica $f(x)=3x^5+5x^3-30x-\alpha$. Explica con detalle lo que haces.

Problema 3. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,a]$ y $[a,+\infty[$, $(a>0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}_o$ por $f_n(x)=\dfrac{2nx^2}{n^2x^4+1}$. Explica con detalle lo que haces.

Problema 4. (a) Sea $z=\cos(xy)+y\cos x$ donde $x=u^2+v$, $y=u-v^2$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en el punto $(u,v)=(1,1)$.

(b) Sea $z=z(x,y)$ la función dada implícitamente por $yz^4+x^2z^3-\mathrm{e}^{xyz}=0$. Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ en el punto $(x,y)=(1,0)$.

Problema 5. (a) Calcular el volumen de la región $A\subseteq\mathbb{R}^3$ comprendida entre el plano XY y el paraboloide $z=x^2+y^2$ y que queda dentro del cilindro $x^2+y^2-2x=0$. Es decir:

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2,\ \ x^2+y^2-2x\leqslant 0\}$$

(b) Calcular $\iint_D\sqrt{xy}\,d(x,y)$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^4\leqslant xy,\ 0\leqslant x,\ 0\leqslant y\}$.

Problema 6. Calcular la mínima distancia del origen a la superficie de ecuación $xy^2z^3=2$.

Granada, 5 de Julio de 2001.