Soluciones de los ejercicios del examen de Fundamentos Matemáticos I
Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación - septiembre de 2007

1. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{2-y}{(x-1)^2+(y-2)^2},\dfrac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$ definido en $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(1,2)\}$.

a) (0.5 puntos) Justifica que el campo **F** es localmente conservativo en Ω, pero no es conservativo en ningún abierto que contenga una circunferencia $\mathrm{C}((1,2),r)$ con centro en el punto $(1,2)$ y radio $r>0$.

b) (0.75 puntos) Sea $x>2$ e $y>2$. Pongamos $a=(2,2)$, $b=(2,y)$, $c=(x,y)$. Calcula la función

$$f(x,y)=\int\limits_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}+\int\limits_{[b,c]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

y justifica que es una función potencial de **F** en el semiplano $\mathrm{A}=\big\{(x,y):y>2\big\}$.

Solución.

a) Pongamos $\mathrm{P}(x,y)=\dfrac{2-y}{(x-1)^2+(y-2)^2}$, $\mathrm{Q}(x,y)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$. Las funciones P, Q son funciones racionales en Ω, por lo que tienen derivadas parciales continuas de todos órdenes en Ω. Además, para todo $(x,y)\in\Omega$ se verifica que

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x,y)=\frac{3+2x-x^2-4y+y^2}{\big((x-1)^2+(y-2)^2\big)^2}=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x,y)$$

En consecuencia **F** es localmente conservativo en Ω.

Calculemos la integral de línea de **F** a lo largo de una circunferencia $\mathrm{C}((1,2),r)$. Tenemos que

$$\int\limits_{\mathrm{C}((1,2),r)}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{F}(1+r\cos t,2+r\,\mathrm{sen}\,t).(-r\,\mathrm{sen}\,t,r\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t=2\pi$$

Deducimos que el campo **F** no es conservativo en ningún abierto que contenga una circunferencia centrada en el punto $(1,2)$.

b) El segmento $[a,b]$ tiene la parametrización natural dada por $\mathbf{r}(t)=(2,t)$ donde $2\leqslant t\leqslant y$.

$$\int\limits_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_2^y\mathbf{F}(2,t).(0,1)\,\mathrm{d}t=\int_2^y\frac{1}{1+(t-2)^2}\,\mathrm{d}t=\big[\mathrm{arc\,tg}(t-2)\big]_{t=2}^{t=y}=\mathrm{arc\,tg}(y-2)$$

El segmento $[b,c]$ tiene la parametrización natural dada por $\mathbf{r}(t)=(t,y)$ donde $2\leqslant t\leqslant x$.

$$\int\limits_{[c,d]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_2^x\mathbf{F}(t,y).(1,0)\,\mathrm{d}t=\int_2^x\frac{2-y}{(t-1)^2+(y-2)^2}\,\mathrm{d}t=\int_2^x\frac{-1}{y-2}\,\frac{1}{1+\left(\dfrac{t-1}{y-2}\right)^2}=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{y-2}-\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)$$

Por tanto

$$f(x,y)=\mathrm{arc\,tg}(y-2)+\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{y-2}-\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)$$

Esta función está definida en el dominio A y tiene derivadas parciales continuas en A. Se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{P}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{Q}(x,y)$$

Por tanto f es una función potencial de $\mathbf{F}$ en A.

Otra solución. No es difícil, por simple inspección, relacionar el campo **F** con una función de variable compleja. Basta fijarse en el denominador y tantear un poco para llegar a

$$h(z) = \frac{1}{z-1-2i} = \frac{\overline{z}-1+2i}{|z-1-2i|^2} = (z = x+iy) = \mathrm{Q}(x,y) + i\mathrm{P}(x,y)$$

Como la función h es holomorfa en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{1+2i\}$, las funciones P y Q satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en Ω y, en particular, se verificará que $\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$. Por otra parte, si γ es un camino cerrado en Ω, se tiene que

$$\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{z-1-2i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(1+2i)$$

Además, si es $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, tenemos que

$$\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_\gamma \mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Deducimos que

$$\int_\gamma \mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{Im}\left(\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z\right) = 2\pi \operatorname{Ind}_\gamma(1+2i)$$

En particular, para $\gamma = \mathrm{C}(1+2i, r)$ obtenemos que $\displaystyle\int_{\mathrm{C}((1,2),r)} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\pi$.

La función $\mathrm{H}(z) = \log(z-1-2i)$ es holomorfa en el abierto $\mathrm{B} = \left\{z\in\mathbb{C} : z-1-2i \notin \mathbb{R}_o^-\right\} = \mathbb{C}\setminus\{x+2i : x\in\mathbb{R},\ x\leqslant 1\}$, por lo que la función $h(z) = \dfrac{1}{z-1-2i}$ tiene como primitiva en dicho abierto a la función $\mathrm{H}(z)$. Observa que el abierto A está contenido en B. Por tanto la función $f(x,y)$, cuyo cálculo se pide, se puede obtener directamente evaluando dicha primitiva y tomando parte imaginaria. Teniendo en cuenta que en A es $y-2>0$, resulta que para $(x,y)\in\mathrm{A}$ con $x-1>0$ es:

$$f(x,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{H}(x+iy) - \mathrm{H}(2+2i)) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)$$

Y para $(x,y)\in\mathrm{A}$ con $x-1<0$ es

$$f(x,y) = \mathrm{Im}(\mathrm{H}(x+iy) - \mathrm{H}(2+2i)) = \pi + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-2}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)$$

2. (1.25 puntos) Calcula, usando el teorema de Green, la integral de línea

$$\int_\gamma \left(2x\,\mathrm{e}^{x^2+2y^2}+\mathrm{e}^{y^2}-y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\,\mathrm{e}^{x^2+2y^2}+2xy\,\mathrm{e}^{y^2}+x^2\right)\mathrm{d}y$$

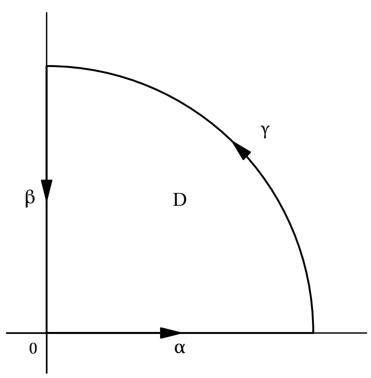
Donde γ es la parte de la circunferencia $C((0,0),1)$ que queda en el primer cuadrante recorrida en sentido anti horario.

Solución.

Pongamos

$$\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=(2x\,\mathrm{e}^{x^2+2y^2}+\mathrm{e}^{y^2}-y,\ 4y\,\mathrm{e}^{x^2+2y^2}+2xy\,\mathrm{e}^{y^2}+x^2)$$

Se tiene que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=1+2x$. Para aplicar el teorema de Green debemos tener una curva cerrada. Para ello pongamos $\Gamma=\alpha+\gamma+\beta$ donde α es el segmento que va de $(0,0)$ a $(1,0)$ y β es el segmento que va de $(0,1)$ a $(0,0)$.



El camino Γ es cerrado y podemos aplicar el teorema de Green para obtener que

$$\int_{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}=\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}(x,y)$$

Donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\right\}$. Haciendo el cambio de variables $x=\rho\cos t$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,t$ donde, como es usual $\rho>0, -\pi\leqslant t\leqslant\pi$, y poniendo

$$A=\left\{(\rho,t):(\rho\cos t,\rho\,\mathrm{sen}\,t)\in D\right\}=\left\{(\rho,t):0<\rho\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant\pi/2\right\}$$

Obtenemos

$$\iint_D(1+2x)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint_A(1+2\rho\cos t)\rho\,\mathrm{d}(\rho,t)=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1(\rho+2\rho^2\cos t)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}(1/2+2/3\cos t)\,\mathrm{d}t=\pi/4+2/3$$

En consecuencia

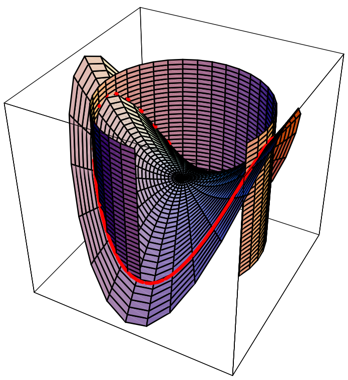
$$\begin{aligned}\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y &=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}-\int_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}-\int_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}-\int_0^1 P(t,0)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 Q(0,t)\,\mathrm{d}t=\\ &=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}-\int_0^1(1+2t\,\mathrm{e}^{t^2})\,\mathrm{d}t+\int_0^1 4t\,\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

3. Sea S la parte del hiperboloide $z = x^2 - y^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y sea $\mathbf{r}$ la curva intersección de ambos. Calcula la circulación del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z + x)$ a lo largo de $\mathbf{r}$.

a) (0.5 puntos) Directamente (considera la orientación apropiada para $\mathbf{r}$).

b) (0.75 puntos) Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).

Solución.



a) Es claro que la proyección de la curva $\mathbf{r}$ sobre el plano XY es la circunferencia unidad. Deducimos que

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

La circulación del campo a lo largo de $\mathbf{r}$ viene dada por la integral de línea

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(1 - 2\cos t \operatorname{sen}(2t) - 2\cos(2t)\operatorname{sen}(2t)\big)\,dt = 2\pi$$

b) La superficie S es la parte del hiperboloide $z = x^2 - y^2$ cuya proyección sobre el plano XY es el disco unidad. Es decir, S es la gráfica siguiente $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 1, z = x^2 - y^2\}$. Podemos describir S como sigue $S = \{(\rho\cos t, \rho\operatorname{sen} t, z) : \rho \leqslant 1, -\pi \leqslant t \leqslant \pi, z = \rho^2\cos(2t)\}$. Por tanto, una parametrización de S usando coordenadas polares es

$$\gamma(\rho, t) = (\rho\cos t, \rho\operatorname{sen} t, \rho^2\cos(2t)), \qquad (\rho, t) \in [0,1] \times [-\pi, \pi]$$

Calculemos el producto vectorial fundamental

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} \times \frac{\partial\gamma}{\partial t} = (-2\rho^2\cos t, 2\rho^2\operatorname{sen} t, \rho)$$

Este vector tiene componente z positiva por lo que la orientación correspondiente de la superficie S induce en la curva frontera $\mathbf{r}$ la orientación que se ha usado en el apartado anterior (la que corresponde a recorrer la circunferencia unidad en el plano XY en sentido anti horario).

El rotacional de $\mathbf{F}$ se calcula fácilmente y resulta ser $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = (0, -1, 2)$. El teorema de Stokes afirma que en estas condiciones se verifica la igualdad

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,d\mathbf{S}$$

Calculemos la segunda integral.

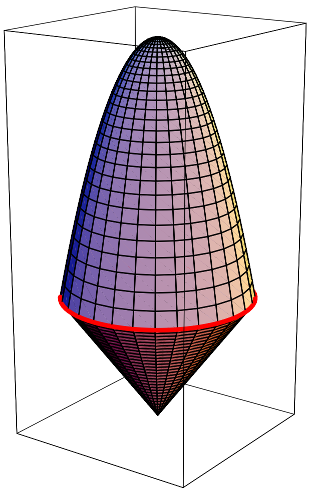
$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \int_0^1 \left[\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{rot}\mathbf{F}(\gamma(\rho, t)).\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} \times \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt\right] d\rho = \int_0^1 \left[\int_{-\pi}^{\pi} 2\rho(1 - \rho\operatorname{sen} t)\,dt\right] d\rho = 2\pi$$

4. Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz,yx,zy)$ a través de la superficie S formada por la parte del paraboloide $z=6-x^2-y^2$ que queda sobre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la parte de dicho cono que queda por debajo del paraboloide.

a) (0.75 puntos) Usando el teorema de la divergencia.

b) (1 punto) Directamente.

Solución.



a) Llamando Ω a la región que queda dentro de la superficie S, el teorema de Gauss afirma que

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

Tenemos que $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)=x+y+z$. Y

$$\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 6-x^2-y^2\right\}$$

Donde D es la proyección de Ω sobre el plano XY.

$$D=\left\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 6-x^2-y^2\right\}$$

Este conjunto se describe muy fácilmente en coordenadas polares

$$D=\{(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t):-\pi\leqslant t\leqslant\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 6-\rho^2\}=\{(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t):-\pi\leqslant t\leqslant\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\}=D((0,0),2)$$

Por tanto

$$\Omega=\{(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t,z):-\pi\leqslant t\leqslant\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ \rho\leqslant z\leqslant 6-\rho^2\}$$

En consecuencia, podemos calcular la integral de volumen en coordenadas cilíndricas como sigue:

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int_0^2\left[\int_\rho^{6-\rho^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(\rho\cos t+\rho\operatorname{sen} t+z)\rho\,dt\right]dz\right]d\rho=\int_0^2\left[\int_\rho^{6-\rho^2}2\pi\rho z\,dz\right]d\rho=\frac{92\pi}{3}$$

b) La superficie S está formada por dos superficies $S=S_1\cup S_2$. Donde S_1 es la parte superior y S_2 la inferior. Una parametrización de la superficie S_1 es

$$\gamma_1(\rho,t)=(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t,6-\rho^2),\qquad (\rho,t)\in[0,2]\times[-\pi,\pi]$$

Tenemos:

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}=(2\rho^2\cos t,2\rho^2\operatorname{sen} t,\rho)$$

que es la normal exterior, por lo que:

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\mathbf{F}.\,d\mathbf{S_1} &=\int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{F}(\gamma_1(\rho,t)).(2\rho^2\cos t,2\rho^2\operatorname{sen} t,\rho)\,dt\right]d\rho=\\ &=\int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\rho^2\big(-2\rho(-6+\rho^2)\cos^2 t-(-6+\rho^2)\operatorname{sen} t+2\rho^2\cos t\operatorname{sen}^2 t\big)\,dt\right]d\rho=\frac{80\pi}{3}\end{aligned}$$

Una parametrización de la superficie S_2 es

$$\gamma_2(\rho,t)=(\rho\cos t,\rho\,\mathrm{sen}\,t,\rho),\qquad (\rho,t)\in[0,2]\times[-\pi,\pi]$$

Tenemos:

$$\frac{\partial\gamma_2}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}=(-\rho\cos t,-\rho\,\mathrm{sen}\,t,\rho)$$

que es la normal interior. Para aplicar el teorema de Gauss debemos usar siempre la orientación exterior, por lo que debemos invertir esta orientación:

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S_2}&=-\int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{F}(\gamma_2(\rho,t)).(-\rho\cos t,-\rho\,\mathrm{sen}\,t,\rho)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho=\\&=\int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\rho^3\big(\cos^2 t+\mathrm{sen}^2\,t\cos t-\mathrm{sen}\,t\big)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho=4\pi\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\iint_S\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\frac{80\pi}{3}+4\pi=\frac{92\pi}{3}$$

5. Sea $f(t)=t(1-t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$ y consideremos la extensión impar de f de período 2.

a) (0.5 puntos) Calcula los coeficientes de Fourier de f.

b) (0.5 puntos) Justifica las igualdades

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

Solución.

a) Sabemos que la serie de Fourier de una función impar de periodo 2L viene dada por $\sum\limits_{n\geqslant1}b_n\,\mathrm{sen}(\pi n t/\mathrm{L})$, donde b_n son los coeficientes seno que vienen dados por

$$b_n=\frac{2}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}}f(t)\,\mathrm{sen}(\pi n t/\mathrm{L})\,\mathrm{d}t$$

En nuestro caso será $\mathrm{L}=1$. Haciendo tres integraciones por partes y teniendo en cuenta que $\cos(\pi n)=(-1)^n$, $\mathrm{sen}(\pi n)=0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, tenemos:

$$\begin{aligned}b_n&=2\int_0^1 t(1-t)\,\mathrm{sen}(\pi n t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 t\,\mathrm{sen}(\pi n t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^1 t^2\,\mathrm{sen}(\pi n t)\,\mathrm{d}t=\\&=2\left(\left[-t\frac{\cos(\pi n t)}{\pi n}\right]_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{\pi n}\int_0^1\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t\right)-2\left(\left[-t^2\frac{\cos(\pi n t)}{\pi n}\right]_{t=0}^{t=1}+\frac{2}{\pi n}\int_0^1 t\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t\right)=\\&=-\frac{4}{\pi n}\int_0^1 t\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{\pi n}\left(\left[t\frac{\mathrm{sen}(\pi n t)}{\pi n}\right]_{t=0}^{t=1}-\frac{1}{\pi n}\int_0^1\mathrm{sen}(\pi n t)\,\mathrm{d}t\right)=\frac{4}{(\pi n)^2}\int_0^1\mathrm{sen}(\pi n t)\,\mathrm{d}t=\\&=\frac{4}{(\pi n)^3}(1-\cos(\pi n))=4\frac{1-(-1)^n}{\pi^3 n^3}\end{aligned}$$

Sabemos que los coeficientes de Fourier c_n vienen dados por

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\qquad(n=1,2,3,\dots)$$

En nuestro caso, los coeficientes coseno a_n son todos nulos, por lo que resulta que $c_0 = 0$ y

$$c_n = -2i\frac{1-(-1)^n}{\pi^3 n^3} \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{Z} \text{ con } n \neq 0$$

b) Como la función f tiene derivada continua, podemos asegurar que para todo $t\in[0,1]$ es $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\pi n t)$. Teniendo en cuenta que $b_{2n} = 0$ y que $b_{2n-1} = \dfrac{8}{\pi^3(2n-1)^3}$, resulta que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\operatorname{sen}(\pi(2n-1)t) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi(2n-1)t)}{\pi^3(2n-1)^3}$$

Evaluando esta igualdad en el punto $t = 1/2$ y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(\pi(2n-1)/2) = \operatorname{sen}(\pi n - \pi/2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, obtenemos

$$f(1/2) = \frac{1}{4} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n-1)^3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

La igualdad de Parseval afirma que para una función periódica con periodo T es

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

Esta igualdad se traduce en nuestro caso ($T = 2L = 2$) por:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)^2\,dt = \int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{1}{30} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

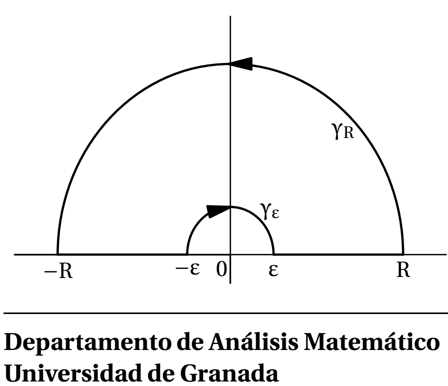
Como $|c_n| = |c_{-n}|$, $c_0 = 0$ y $c_{2n} = 0$ tenemos que

$$\frac{1}{30} = 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_{2n-1}|^2 = 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^6(2n-1)^6} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

6. (1.5 puntos) Integra la función de variable compleja $f(z) = \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de la curva frontera, $\Gamma(\varepsilon, R)$, de la *mitad superior* de la corona circular $A(0;\varepsilon,R)$ y usa el teorema de los residuos para calcular la integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$$

Solución.



Aplicaremos el teorema de los residuos a la función $f(z)$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$ y el ciclo $\Gamma(\varepsilon, R)$. El conjunto de las singularidades de f en Ω es $S = \{0\}$. El ciclo $\Gamma(\varepsilon, R)$ con $0 < \varepsilon < a < R$ no pasa por ninguna singularidad de f, es decir, es un ciclo contenido en $\Omega \setminus S$. Claramente $\Gamma(\varepsilon, R)$ es nulhomólogo respecto a $\Omega = \mathbb{C}$. En estas condiciones el teorema de los residuos afirma que

$$\int_{\Gamma(\varepsilon,R)} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f(z),0)\operatorname{Ind}_{\Gamma(\varepsilon,R)}(0) = 0 \tag{1}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el sentido de recorrido del camino y llamando $\mathrm{I}(r)$ a la integral de f en una semicircunferencia de centro 0 y radio r recorrida en sentido anti horario, se tiene que:

$$\int_{\Gamma(\varepsilon,\mathrm{R})} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} f(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{I}(\mathrm{R}) - \mathrm{I}(\varepsilon) - \int_{-\varepsilon}^{-\mathrm{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} (f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{I}(\mathrm{R}) - \mathrm{I}(\varepsilon) \tag{2}$$

Para todo z en el semiplano superior, $\operatorname{Im} z > 0$, con $|z| = \mathrm{R}$ se tiene que:

$$\left|f(z)\right| = \frac{\left|1-\mathrm{e}^{2iz}\right|}{|z|^2} \leqslant \frac{1+\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im} z}}{|z|^2} \leqslant \frac{2}{\mathrm{R}^2}$$

Deducimos que

$$|\mathrm{I}(\mathrm{R})| \leqslant \pi \mathrm{R}\frac{2}{\mathrm{R}^2} = \frac{2\pi}{\mathrm{R}} \Longrightarrow \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \mathrm{I}(\mathrm{R}) = 0 \tag{3}$$

El denominador de f tiene un cero de orden 2 en $z=0$ y el numerador tiene en $z=0$ un cero de orden 1 (porque $1-\mathrm{e}^{2iz}$ se anula para $z=0$ pero su derivada $-2i\,\mathrm{e}^{2iz}$ no se anula). Concluimos que f tiene un polo simple en $z=0$. En estas condiciones sabemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}(\varepsilon) = \pi i \operatorname{Res}(f(z),0) \tag{4}$$

Por otra parte

$$f(x)+f(-x) = \frac{1-\mathrm{e}^{2ix}}{x^2} + \frac{1-\mathrm{e}^{-2ix}}{x^2} = \frac{2-2\cos(2x)}{x^2} = \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \tag{5}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (1), (2), (3), (4) y (5), obtenemos que:

$$4\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \mathrm{R}\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{\mathrm{R}} (f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x = \pi i \operatorname{Res}(f(z),0)$$

Solamente queda calcular este residuo. Como se trata de un polo simple tenemos que:

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{2iz}}{z} = -2i$$

Finalmente, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi i(-2i) = \frac{\pi}{2}$$