Soluciones de los ejercicios del examen de Fundamentos Matemáticos I
Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación - septiembre de 2006

1 a) (0.5 puntos) Justifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2},\dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}\right)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$.

b) (1.25 puntos) Pongamos $a=(0,0)$, $b=(x,0)$, $c=(x,y)$. Calcula la función

$$f(x,y)=\int\limits_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}+\int\limits_{[b,c]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

y comprueba que es una función potencial de $\mathbf{F}$.

Solución. a) Pongamos $P(x,y)=\dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$. Tenemos que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ es

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{2(x+2x^3+x^5-xy^2)}{(1+2x^2+x^4+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Además, $\mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo. Luego $\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$.

b) El segmento $[a,b]$ puede describirse por $\mathbf{r}(t)=(t,0)$ donde $0\leqslant t\leqslant x$. Luego

$$\int\limits_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_0^x\mathbf{F}(t,0).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\mathbf{F}(t,0).(1,0)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 0\,\mathrm{d}t=0$$

El segmento $[b,c]$ puede describirse por $\mathbf{r}(t)=(x,t)$ donde $0\leqslant t\leqslant y$. Luego

$$\int\limits_{[b,c]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_0^y\mathbf{F}(x,t).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y\mathbf{F}(x,t).(0,1)\,\mathrm{d}t=\int_0^y Q(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y\frac{1+x^2}{t^2+(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{1+x^2}$$

Hemos obtenido así que

$$f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{1+x^2}$$

Es inmediato comprobar que para todo $(x,y)\in\Omega$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y),\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$$

Por tanto, f es una función potencial de $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^2$.

2 (1.5 puntos) Utiliza el teorema de Green para calcular la integral de línea

$$\int\limits_{\gamma}(\cos x-\frac{1}{6}x^2y^3)\,\mathrm{d}x+(\frac{1}{6}x^3y^2+2\,\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y$$

donde γ es la elipse positivamente orientada $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Solución. Pongamos $P(x,y)=\cos x-\frac{1}{6}x^2y^3$, $Q(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+2\,\mathrm{e}^y$, y $\Omega=\left\{(x,y):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1\right\}$. Usando el teorema de Green y un cambio de variable a coordenadas polares junto a un cambio de escala, tenemos que:

$$\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}(x,y)=\iint_\Omega x^2y^2\,\mathrm{d}(x,y)=\begin{bmatrix}x=2\rho\cos\vartheta\\ y=3\rho\operatorname{sen}\vartheta\end{bmatrix}=$$
$$=6^3\iint_B\rho^5\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

donde

$$B=\{(\rho,\vartheta):(2\rho\cos\vartheta,3\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in\Omega\}=\left\{(\rho,\vartheta):\rho^2\leqslant 1\right\}=\{(\rho,\vartheta):0<\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi\}$$

Usando ahora el teorema de Fubini deducimos que

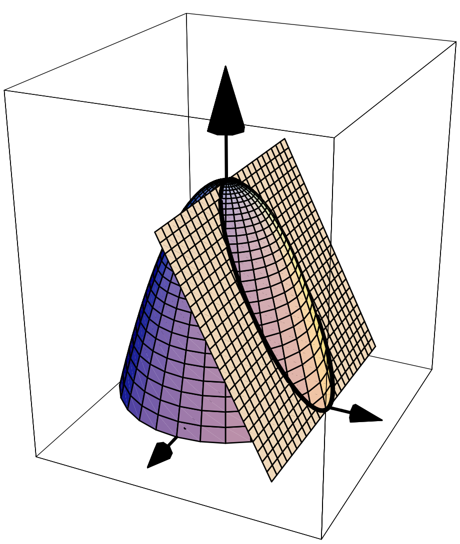
$$6^3\iint_B\rho^5\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)=6^3\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\rho^5\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta=6^3\left(\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right)=$$
$$=36\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=9\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\vartheta)}{2}\,\mathrm{d}\vartheta=9\pi$$

3 Sea S la parte del paraboloide $z=4-x^2-y^2$ que queda sobre el plano $z=4-2y$, y sea $\mathbf{r}$ la curva intersección de ambos. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ a lo largo de $\mathbf{r}$.

a) (1.5 puntos) Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z>0$).

b) (0.75 punto) Directamente (considera la orientación apropiada para $\mathbf{r}$).

Solución.



a) La superficie del paraboloide es una gráfica que tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x,y)=(x,y,4-x^2-y^2)$. Sea S la parte de dicha superficie que queda sobre el plano $z=4-2y$. Tenemos que $(x,y,4-x^2-y^2)\in S$ siempre que $4-x^2-y^2\geqslant 4-2y$, equivalentemente, $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$. Por lo que las ecuaciones paramétricas cartesianas de S son

$$\gamma(x,y)=(x,y,4-x^2-y^2),\qquad (x,y)\in\Omega$$

donde hemos representado por $\Omega=\left\{(x,y):x^2+(y-1)^2\leqslant 1\right\}$ el disco en el plano XY de centro $(0,1)$ y radio 1. Un vector normal a la superficie S es

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}\times\frac{\partial\gamma}{\partial y}=(2x,2y,1)\tag{1}$$

cuya componente z es positiva.

El teorema de Stokes nos dice que (con la orientación adecuada para $\mathbf{r}$)

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\iint_S\operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Fácilmente se calcula que $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=(1,1,1)$. Tenemos así que:

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_\Omega (1,1,1).(2x,2y,1)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_\Omega (1+2x+2y)\,\mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \pi + 2\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}(x,y) = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\vartheta \\ y=1+\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{array}\right] \pi + 2\iint_B (\rho\cos\vartheta+1+\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) =$$

$$(B=\{(\rho,\vartheta):(\rho\cos\vartheta,1+\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\in\Omega\}=\{(\rho,\vartheta):\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi\})$$

$$= \pi+2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \big((\cos\vartheta+\mathrm{sen}\,\vartheta)\rho^2+\rho\big)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = \pi+2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = 3\pi$$

b) Las dos superficies, el paraboloide $z=4-x^2-y^2$ y el plano $z=4-2y$, tienen la misma altura en los puntos del plano XY que verifican la igualdad $x^2+y^2=2y$ o, lo que es lo mismo, $x^2+(y-1)^2=1$. Por tanto, la curva intersección de dichas superficies es el conjunto de puntos

$$\big\{(x,y,z): x^2+(y-1)^2=1,\ z=4-2y\big\}$$

Pongamos $x=\cos t,\ y=1+\mathrm{sen}\,t$, con lo que la condición $x^2+(y-1)^2=1$ se satisface de forma automática y obtenemos que la curva viene dada por

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t,1+\mathrm{sen}\,t,2-2\,\mathrm{sen}\,t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

Dicha curva tiene la orientación antihoraria que es la inducida por la normal exterior (1), pues al recorrerla con la cabeza apuntando en la dirección de dicha normal (es decir, andando por encima del plano y empezando a subir por el lado de la derecha) la superficie S queda a nuestra izquierda.

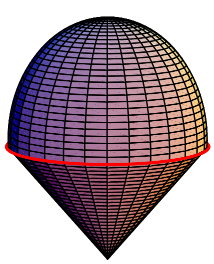
$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(2-2\,\mathrm{sen}\,t,\cos t,1+\mathrm{sen}\,t).(-\mathrm{sen}\,t,\cos t,-2\cos t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi}\big(\cos^2 t+2(-1+\mathrm{sen}\,t)\,\mathrm{sen}\,t-2\cos t(1+\mathrm{sen}\,t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(1+\mathrm{sen}^2 t)\,\mathrm{d}t = 3\pi$$

4 Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(y+x,x-y,z)$ a través de la superficie cerrada formada por la parte del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que queda bajo el plano $z=1$ y la parte de la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ que queda sobre dicho plano.

a) (1.5 punto) Directamente (elige las orientaciones adecuadas para cada superficie).

b) (1 punto) Usando el teorema de la divergencia.



Solución. a) Las dos superficies son gráficas. La parte superior de la esfera, S_1, es la gráfica de la función $g(x,y)=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ y el cono, S_2, es la gráfica de $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. En ambos casos los parámetros (x,y) toman valores en el disco unidad $\Omega=D((0,0),1)$.

La normal exterior a las superficies S_1 yS_2 viene dada, respectivamente, por

$$\mathbf{m}(x,y) = (-\partial g/\partial x, -\partial g/\partial y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$\mathbf{n}(x,y) = (\partial h/\partial x, \partial h/\partial y, -1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$

Pongamos $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, x-y, z)$. El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_1 viene dado por

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \mathbf{F}(x,y,g(xy)).\mathbf{m}(x,y)\,\mathrm{d}(xy) = \iint_{\Omega} \mathbf{F}\big(x+y, x-y, 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\big).\mathbf{m}(x,y)\,\mathrm{d}(xy) =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{x^2-y^2+2xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 + \sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}(xy) = \begin{bmatrix} x = \rho\cos t \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\, t \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\rho^3 \frac{\cos(2t)+\mathrm{sen}(2t)}{\sqrt{1-\rho^2}} + \rho\big(1+\sqrt{1-\rho^2}\big)\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^1 \rho\big(1+\sqrt{1-\rho^2}\big)\,\mathrm{d}\rho = \frac{5}{3}\pi$$

El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_2 viene dado por

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Omega} \mathbf{F}(x,y,h(xy)).\mathbf{n}(x,y)\,\mathrm{d}(xy) = \iint_{\Omega} \mathbf{F}\big(x+y, x-y, \sqrt{x^2+y^2}\big).\mathbf{m}(x,y)\,\mathrm{d}(xy) =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{x^2-y^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}(xy) = \begin{bmatrix} x = \rho\cos t \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\, t \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \big(\rho^2(\cos(2t)+\mathrm{sen}(2t)) - \rho^2\big)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho = -2\pi\int_0^1 \rho^2 = -\frac{2}{3}\pi$$

El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de $S_1 \cup S_2$ es igual a $\frac{5}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \pi$.

b) El teorema de la divergencia afirma que el flujo saliente de un campo vectorial a través de una superficie cerrada que es la frontera de un dominio Ω en $\mathbb{R}^3$ es igual a la integral de la divergencia del campo en dicho dominio. En nuestro caso el dominio es

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$$

y la divergencia del campo es $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 1$. Notemos D el disco de centro $(0,0)$ y radio 1. El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de Ω viene dado por

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,\mathrm{dz}\right]\mathrm{d}(x,y) = \iint_D \left(1+\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \pi + \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\rho\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2\right)\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho = \pi$$

5 a) (1 punto) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por $f(t) = t$ para $0 \leqslant t < 1$ y $f(t+1) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) (0.5 puntos) Justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

c) (0.5 puntos) Justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solución. a) Se calcula fácilmente, integrando por partes, que

$$c_n = \int_0^1 t\, \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t = \frac{i}{2n\pi}$$

y $c_0 = \dfrac{1}{2}$. Deducimos que los coeficientes coseno y seno de f vienen dados por

$$a_n = c_n + c_{-n} = 0$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -\frac{1}{n\pi}$$

La función f es periódica con periodo 1 y es derivable a trozos en $[0,1]$. Además los únicos puntos de discontinuidad de f son los números enteros, donde la función salta de 0 a 1. Concluimos, en virtud del teorema de Riemann-Dirichlet, que la serie de Fourier de f converge en todo punto $t \in \mathbb{R}$ y su suma es igual a $1/2$ para $t \in \mathbb{Z}$ y es igual a $f(t) = t$ para $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$$t = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(2n\,\pi t) \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

b) Haciendo en esta igualdad $t = 1/4$, obtenemos

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\,\pi/2) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,\pi} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

c) La identidad de Parseval afirma que

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

En nuestro caso será

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2\pi^2} = \int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$