Soluciones de los ejercicios del examen de Fundamentos Matemáticos I
Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación - febrero de 2007

1 Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},\dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$ definido en el abierto $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$.

a) (0.5 puntos) Justifica que el campo $\mathbf{F}$ es localmente conservativo en Ω, pero no es conservativo en ningún abierto que contenga una circunferencia $\mathrm{C}((1,0),r)$ con centro en el punto $(1,0)$ y radio $r>0$.

b) (0.75 puntos) Sea $x\in\mathbb{R}$ e $y>0$. Pongamos $a=(0,0)$, $b=(0,y)$, $c=(x,y)$. Calcula la función

$$f(x,y)=\int_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}+\int_{[b,c]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

y comprueba que es una función potencial de $\mathbf{F}$ en el semiplano superior $\mathrm{A}=\{(x,y):y>0\}$.

Solución.

a) Pongamos $\mathrm{P}(x,y)=\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}$, $\mathrm{Q}(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$. Las funciones P,Q son funciones racionales en Ω, por lo que tienen derivadas parciales continuas de todos órdenes en Ω. Además, para todo $(x,y)\in\Omega$ se verifica que

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x,y)=\frac{-1+2x-x^2+y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x,y)$$

En consecuencia $\mathbf{F}$ es localmente conservativo en Ω.

Calculemos la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de una circunferencia $\mathrm{C}((1,0),r)$. Tenemos que

$$\int_{\mathrm{C}((1,0),r)}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{F}(1+r\cos t,r\operatorname{sen}t).(-r\operatorname{sen}t,r\cos t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}(1+r\cos t)\,\mathrm{d}t=2\pi$$

Deducimos que el campo $\mathbf{F}$ no es conservativo en ningún abierto que contenga una circunferencia centrada en el punto $(1,0)$.

b)

$$\int_{[a,b]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_0^1\mathbf{F}[0,ty].(0,y)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^2y^3}{1+t^2y^2}\,\mathrm{d}t=y\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\mathrm{d}t=y-\operatorname{arctg}y$$

$$\int_{[c,d]}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_0^1\mathbf{F}[tx,y].(x,0)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{-xy}{(tx-1)^2+y^2}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{x/y}{\left(\dfrac{tx-1}{y}\right)^2+1}=-\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{y}\right)-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$$

Por tanto

$$f(x,y)=y-\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{y}\right)-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}=y-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{y}\right)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\mathrm{P}(x,y),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\mathrm{Q}(x,y)$$

Otra solución. No es difícil, por simple inspección, relacionar el campo **F** con una función de variable compleja. Basta fijarse en el denominador y tantear un poco para llegar a

$$f(z)=\frac{z}{z-1}=\frac{z(\overline{z}-1)}{|z-1|^2}=\frac{|z|^2-z}{|z-1|^2}=(z=x+iy)=\mathrm{Q}(x,y)+i\mathrm{P}(x,y)$$

Como la función f es holomorfa en el abierto $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{1\}$, las funciones P y Q satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en Ω y, en particular, se verificará que $\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}=\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}$. Por otra parte, si γ es un camino cerrado en Ω, se tiene que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma \frac{z}{z-1}\,\mathrm{d}z=\int_\gamma\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z=\int_\gamma\frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Ind}_\gamma(1)$$

Además, si es $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, tenemos que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma \mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}x-\mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}y+i\int_\gamma \mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}x+\mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Deducimos que

$$\int_\gamma \mathrm{P}(x,y)\,\mathrm{d}x+\mathrm{Q}(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\gamma \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right)=2\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(1)$$

En particular, para $\gamma=\mathrm{C}((1,0),1)$ obtenemos que $\displaystyle\int_{\mathrm{C}((1,0),1)}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi$.

La función $\log(z-1)$ es holomorfa en el abierto $\mathrm{B}=\left\{z\in\mathbb{C}: z-1\notin\mathbb{R}_o^-\right\}=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\leqslant 1\}$ por lo que la función $f(z)=1+\dfrac{1}{z-1}$ tiene como primitiva en dicho abierto a la función $\mathrm{H}(z)=z+\log(z-1)$. Por tanto la función $f(x,y)$ se puede obtener directamente evaluando dicha primitiva y tomando parte imaginaria. Resulta así:

$$f(x,y)=\mathrm{Im}(\mathrm{H}(x+iy)-\mathrm{H}(0))=y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x-1}-\pi=y-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{y}-\frac{\pi}{2}$$

2 (1.25 punto) Calcula la integral de línea

$$\int_\Gamma\left(\cos(y^2)+\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{1+x^2}-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(2y\,\mathrm{e}^{y^2}\operatorname{arctg}x-2xy\operatorname{sen}(y^2)+x\right)\mathrm{d}y$$

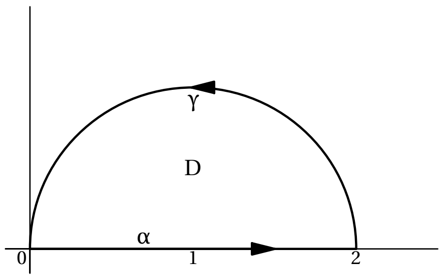
Donde Γ es la mitad de la circunferencia $\mathrm{C}((1,0),1)$ que queda en el semiplano superior recorrida en sentido anti horario.

Solución.

Pongamos

$$\mathrm{P}(x,y)=\cos(y^2)+\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{1+x^2}-y^2,\qquad \mathrm{Q}(x,y)=2y\,\mathrm{e}^{y^2}\operatorname{arctg}x-2xy\operatorname{sen}(y^2)+x$$

Se tiene que $\dfrac{\partial\mathrm{Q}}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial\mathrm{P}}{\partial y}(x,y)=1+2y$. Para aplicar el teorema de Green pongamos $\Gamma=\gamma+\sigma$ donde γ es la semicircunferencia del enunciado y σ es el segmento que va de $(0,0)$ a $(2,0)$.



El camino Γ es cerrado y podemos aplicar el teorema de Green para obtener que

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) d(x,y)$$

Donde $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\right\}$. Haciendo el cambio de variables $x-1 = \rho\cos t$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\, t$ donde, como es usual $\rho > 0, -\pi \leqslant t \leqslant \pi$, y poniendo

$$A = \left\{(\rho,t) : (\rho\cos t, \rho\,\mathrm{sen}\, t)\in D\right\} = \left\{(\rho,t) : \rho^2 \leqslant 1, \mathrm{sen}\, t \geqslant 0\right\} = \left\{(\rho,t) : 0 < \rho \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant \pi\right\}$$

obtenemos

$$\iint_D (1+2y)\,d(x,y) = \iint_A (1+2\rho\,\mathrm{sen}\, t)\rho\,d(\rho,t) = \int_0^{\pi}\left[\int_0^1 (\rho + 2\rho^2\,\mathrm{sen}\, t)\,d\rho\right] dt = \int_0^{\pi} (1/2 + 2/3\,\mathrm{sen}\, t)\,dt = \pi/2 + 4/3$$

En consecuencia

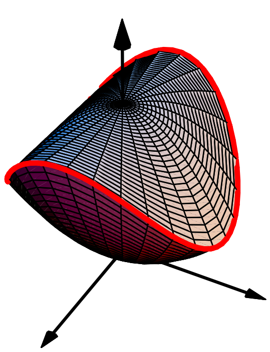
$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} - \int_{\sigma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} - \int_0^2 P(t,0)\,dt = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} - \int_0^2 \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} - \mathrm{arctg}\, 2\end{aligned}$$

3 Sea S la parte del cilindro parabólico $z = 3 - 2x^2$ que queda por encima del paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, y sea $\mathbf{r}$ la curva intersección de ambos. Calcula la circulación del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (-yz, xz, xy)$ a lo largo de $\mathbf{r}$.

a) (0.75 puntos) Directamente (considera la orientación apropiada para $\mathbf{r}$).

b) (0.75 puntos) Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).

Solución.



a) Los puntos del plano donde las dos superficies tienen igual altura son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} z = x^2 + 3y^2 \\ z = 3 - 2x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Es decir, la proyección de la curva $\mathbf{r}$ sobre el plano XY es la circunferencia unidad. Deducimos que

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 3 - 2\cos^2 t), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

La circulación del campo a lo largo de $\mathbf{r}$ viene dada por la integral de línea

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(4\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + 3 - 2\cos^2 t\right)\mathrm{d}t = 5\pi$$

b) La superficie S es la parte del cilindro parabólico $z = 3-2x^2$ cuya proyección sobre el plano XY es el disco unidad. Es decir, S es la gráfica siguiente $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant 1, z = 3-2x^2\right\}$. Podemos describir S como sigue $\mathrm{S} = \left\{(\rho\cos t, \rho\operatorname{sen} t, z) : \rho \leqslant 1, -\pi \leqslant t \leqslant \pi, z = 3-\rho^2\cos^2 t\right\}$. Por tanto, una parametrización de S usando coordenadas polares es

$$\gamma(\rho,t) = (\rho\cos t, \rho\operatorname{sen} t, 3-\rho^2\cos^2 t), \qquad (\rho,t)\in[0,1]\times[-\pi,\pi]$$

Calculemos el producto vectorial fundamental

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma}{\partial t} = (4\rho^2\cos t, 0, \rho)$$

Este vector tiene componente z positiva por lo que la orientación correspondiente de la superficie S induce en la curva frontera $\mathbf{r}$ la orientación que se ha usado en el apartado anterior (la que corresponde a recorrer la circunferencia unidad en el plano XY en sentido anti horario).

El rotacional de $\mathbf{F}$ se calcula fácilmente y resulta ser $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,-2y,2z)$. El teorema de Stokes afirma que en estas condiciones se verifica la igualdad

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathrm{S}} \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Calculemos la segunda integral.

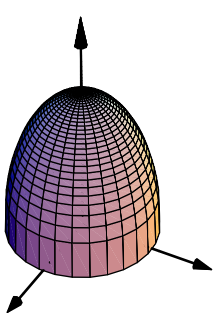
$$\iint_{\mathrm{S}} \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 \operatorname{rot}\mathbf{F}(\gamma(\rho,t)).\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 2\rho(3-2\rho^2\cos^2 t)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t = 5\pi$$

4 (1.5 puntos) Calcula, usando el teorema de la divergencia, el flujo saliente del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3+2yz, y^3-2xz, x^2+y^2)$$

a través de la superficie S formada por la *mitad superior* del elipsoide de revolución $x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4} = 1$.

Solución.



Para aplicar el teorema de la divergencia debemos cerrar la superficie S con su tapadera inferior S_1 que es el disco unidad en el plano XY el cual debemos orientar con la normal exterior (componente $z<0$). Llamando Ω a la región que queda dentro de la mitad superior del elipsoide, tenemos que $\partial\Omega = \mathrm{S}\cup\mathrm{S}_1$. En estas condiciones el teorema de Gauss afirma que

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

Como

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \iint_{S} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S}$$

deducimos que

$$\iint_{S} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,d(x,y,z) - \iint_{S_1} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2$ y que

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

podemos calcular la integral de volumen como sigue:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \iint_{D((0,0),1)} \left[\int_0^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} (3x^2+3y^2)\,dz\right] d(x,y) = \\
&= \iint_{D((0,0),1)} (3x^2+3y^2)2\sqrt{1-x^2-y^2}\,d(x,y) = \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos t \\ y = \rho\operatorname{sen} t \end{array}\right] = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 6\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\right] dt = \left[1-\rho^2 = u^2\right] = 2\pi\int_0^1 (1-u^2)u^2\,du = \frac{8\pi}{5}
\end{aligned}$$

Por otra parte, una parametrización de la superficie S_1 es

$$\gamma(\rho,t) = (\rho\cos t, \rho\operatorname{sen} t, 0), \qquad (\rho,t) \in [0,1]\times[-\pi,\pi]$$

Tenemos:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} \times \frac{\partial\gamma}{\partial t} = (0,0,\rho)$$

que es la normal interior, por lo que:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(\rho,t)).(0,0,-\rho)\,d\rho\right] dt = -\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right] dt = -\frac{\pi}{2}$$

Concluimos que

$$\iint_{S} \mathbf{F}.\,d\mathbf{S} = \frac{8\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{21}{10}\pi$$

5 a) (0.25 puntos) Calcula los coeficientes de Fourier de la función periódica de periodo 2 dada por $f(t) = t^2$ para $-1 \leqslant t \leqslant 1$ y $f(t+2) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) (0.75 puntos) Justifica que para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que la suma de la serie de Fourier de f es igual a $f(t)$ y deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Solución.

a) Los coeficientes de Fourier c_n están dados por

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} t^2\,\mathrm{e}^{-\pi i n t}\,\mathrm{d}t$$

Integrando por partes dos veces se obtiene fácilmente que

$$c_n = 2\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

Directamente, se calcula $c_0 = \frac{1}{3}$.

b) Como la función f tiene derivada continua a trozos y es ella misma continua en todo punto, se sigue, en virtud de las condiciones de Riemann–Dirichlet que la serie de Fourier de f converge en todo punto $t \in \mathbb{R}$ y su suma es igual a $f(t)$. En particular, para todo $t \in [-1,1]$ se verificará que

$$f(t) = t^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\pi i n t} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,\mathrm{e}^{\pi i n t} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\pi i n t}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\mathrm{e}^{\pi i n t} + \mathrm{e}^{-\pi i n t}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n\cos(n\pi t)$$

En particular, para $t = 0$ se verifica que

$$0 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

La igualdad de Parseval afirma que

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2}\left|f(t)\right|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

Esta igualdad se traduce en nuestro caso por:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^4}\frac{1}{n^4} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

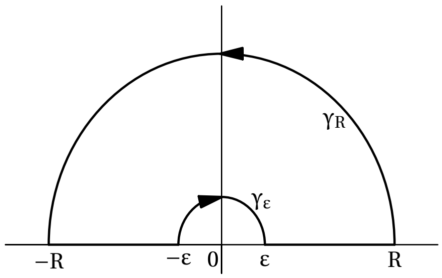
6 (1.5 puntos) Integra la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{2iz}}{z^2(z^2+a^2)} \qquad a > 0$$

a lo largo de la curva frontera, $\Gamma(\varepsilon,\mathrm{R})$, de la *mitad superior* de la corona circular $\mathrm{A}(0;\varepsilon,\mathrm{R})$ con $(0 < \varepsilon < a < \mathrm{R})$, y usa el teorema de los residuos para calcular la integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$$

Solución.



Aplicaremos el teorema de los residuos a la función $f(z)$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$ y el ciclo $\Gamma(\varepsilon, R)$. El conjunto de las singularidades de f en Ω es $S = \{0, ai, -ai\}$. El ciclo $\Gamma(\varepsilon, R)$ con $0 < \varepsilon < a < R$ no pasa por ninguna singularidad de f, es decir, es un ciclo contenido en $\Omega \setminus S$. Claramente $\Gamma(\varepsilon, R)$ es nulhomólogo respecto a $\Omega = \mathbb{C}$. En estas condiciones el teorema de los residuos afirma que

$$\int_{\Gamma(\varepsilon,R)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ai) \tag{1}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el sentido de recorrido del camino y llamando $I(r)$ a la integral de f en una semicircunferencia de centro 0 y radio r recorrida en sentido anti horario, se tiene que:

$$\int_{\Gamma(\varepsilon,R)} f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + I(R) - I(\varepsilon) - \int_{-\varepsilon}^{-R} f(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{R} (f(x) + f(-x))\,dx + I(R) - I(\varepsilon) \tag{2}$$

Para todo z en el semiplano superior, $\operatorname{Im} z > 0$, con $|z| = R > a$ se tiene que:

$$\left|f(z)\right| = \frac{\left|1 - e^{2iz}\right|}{|z|^2\left|z^2 + a^2\right|} \leqslant \frac{1 + e^{-2\operatorname{Im} z}}{|z|^2\left|\left|z^2\right| - a^2\right|} \leqslant \frac{2}{R^2(R^2 - a^2)}$$

Deducimos que

$$|I(R)| \leqslant \pi R \frac{2}{R^2(R^2 - a^2)} = \frac{2\pi}{R(R^2 - a^2)} \Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} I(R) = 0 \tag{3}$$

El denominador de f tiene un cero de orden 2 en $z = 0$ y el numerador tiene en $z = 0$ un cero de orden 1 (porque $1 - e^{2iz}$ se anula para $z = 0$ pero su derivada $-2i\,e^{2iz}$ no se anula). Concluimos que f tiene un polo simple en $z = 0$. En estas condiciones sabemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \tag{4}$$

Por otra parte

$$f(x) + f(-x) = \frac{1 - e^{2ix}}{x^2(x^2 + a^2)} + \frac{1 - e^{-2ix}}{x^2(x^2 + a^2)} = \frac{2 - 2\cos(2x)}{x^2(x^2 + a^2)} = \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2 + a^2)} \tag{5}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (1), (2), (3), (4) y (5), obtenemos que:

$$4\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2 + a^2)}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{\varepsilon}^{R} (f(x) + f(-x))\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), ai) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

Solamente queda calcular los residuos. Como se trata de polos simples tenemos que:

$$\operatorname{Res}(f(z), ai) = \lim_{z\to ai} (z - ai) f(z) = \lim_{z\to ai} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z + ai)} = -\frac{1 - e^{-2a}}{2a^3 i}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1 - e^{2iz}}{z(z^2 + a^2)} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - e^{2iz}}{z} \frac{1}{(z^2 + a^2)} = \frac{-2i}{a^2}$$

Finalmente, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2 + a^2)}\,dx = \frac{1}{4}\left(-2\pi i \frac{1 - e^{-2a}}{2a^3 i} + \pi i \frac{-2i}{a^2}\right) = \frac{\pi}{4a^3}(e^{-2a} - 1 + 2a)$$