Soluciones de los ejercicios del examen de Fundamentos Matemáticos I
Segundo curso de Ingeniería de Telecomunicación - febrero de 2006

1 a) (0.25 puntos) Justifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2), -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$ es conservativo en el abierto $\Omega = \{(x,y) : x > 0\}$.

b) (1 punto) Sean $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Pongamos $a = (1,0)$, $b = (x,0)$, $c = (x,y)$. Calcula explícitamente la función

$$f(x,y) = \int_{[a,b]} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{[b,c]} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

y comprueba que es una función potencial de $\mathbf{F}$ en Ω.

Solución a) Pongamos $P(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $Q(x,y) = -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. Tenemos que para todo $(x,y) \in \Omega$ es

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Además, Ω es un dominio simplemente conexo. Luego $\mathbf{F}$ es conservativo en Ω.

b) El segmento $[a,b]$ puede describirse por $\mathbf{r}(t) = (t,0)$ donde $1 \leqslant t \leqslant x$. Luego

$$\int_{[a,b]} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_1^x \mathbf{F}(t,0).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \mathbf{F}(t,0).(1,0)\,\mathrm{d}t = \int_1^x P(t,0)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \log(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x + x\log x$$

El segmento $[b,c]$ puede describirse por $\mathbf{r}(t) = (x,t)$ donde $0 \leqslant t \leqslant y$. Luego

$$\int_{[b,c]} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^y \mathbf{F}(x,t).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y \mathbf{F}(x,t).(0,1)\,\mathrm{d}t = \int_0^y Q(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^y \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -y\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}x\log(x^2+y^2) - x\log x$$

Donde en ambos casos hemos usado la integración por partes para calcular las primitivas correspondientes. En el primero de los cálculos se ha supuesto implícitamente que $1 < x$ y en el segundo que $y > 0$. Pero es fácil ver que se obtiene el mismo resultado si $0 < x < 1$ o $y < 0$. Hemos obtenido así que

$$f(x,y) = 1 - x - y\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}x\log(x^2+y^2)$$

Es inmediato comprobar que para todo $(x,y) \in \Omega$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

Por tanto, f es una función potencial de $\mathbf{F}$ en Ω.

2 (1 punto) Calcula la integral de línea $\int_\Gamma \left(\mathrm{e}^{x^2} - y^3\right)\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^{y^2} + x^3\right)\mathrm{d}y$. Donde Γ es la frontera positivamente orientada de la región del plano Ω limitada por las circunferencias $\gamma_1 = C((0,1),1)$ y $\gamma_2 = C((0,2),2)$.

Solución Pongamos $P(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} - y^3$, $Q(x,y) = \mathrm{e}^{y^2} + x^3$, y

$$\Omega = \left\{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \geqslant 1,\ x^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\right\} = \left\{(x,y) : 2y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4y\right\}$$

Usando el teorema de Green y un cambio de variable a coordenadas polares, tenemos que:

$$\int_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}(x,y) = 3\iint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = 3\iint_B \rho^3\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

donde

$$B = \{(\rho,\vartheta) : (\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta) \in \Omega\} = \{(\rho,\vartheta) : 2\operatorname{sen}\vartheta \leqslant \rho \leqslant 4\operatorname{sen}\vartheta\} = \{(\rho,\vartheta) : 2\operatorname{sen}\vartheta \leqslant \rho \leqslant 4\operatorname{sen}\vartheta,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi\}$$

La condición $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ es consecuencia de que $\operatorname{sen}\vartheta \geqslant 0$. Usando ahora el teorema de Fubini deducimos que

$$3\iint_B \rho^3\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = 3\int_0^\pi \left[\int_{2\operatorname{sen}\vartheta}^{4\operatorname{sen}\vartheta} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = 180\int_0^\pi \operatorname{sen}^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= 180\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 180\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta - 45\int_0^\pi (2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta =$$

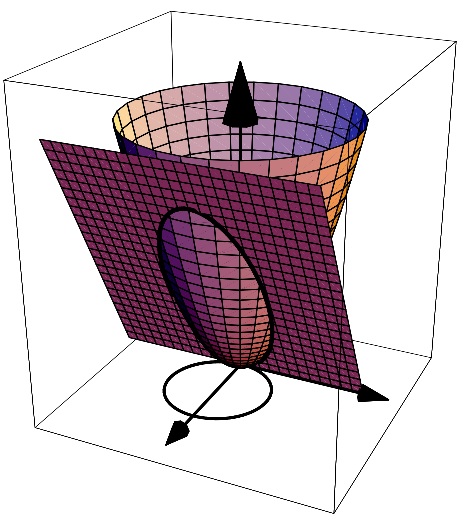
$$= 180\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta - 45\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{135}{2}\pi$$

3 Sea S la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda bajo el plano $z = 2x$, y sea $\mathbf{r}$ la curva intersección de ambos. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ a lo largo de $\mathbf{r}$.

a) (0.75 puntos) Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).

b) (0.75 puntos) Directamente (considera la orientación apropiada para $\mathbf{r}$).

Solución



a) La superficie del paraboloide es una gráfica que tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$. Sea S la parte de dicha superficie que queda bajo el plano $z = 2x$. Tenemos que $(x,y,x^2+y^2) \in S$ siempre que $x^2+y^2 \leqslant 2x$, equivalentemente, $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas de S son

$$\gamma(x,y) = (x,y,x^2+y^2), \qquad (x,y) \in \Omega$$

donde hemos representado por $\Omega = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 2x\right\}$ el disco en el plano XY de centro $(1,0)$ y radio 1. Un vector normal a la superficie S es

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \times \frac{\partial\gamma}{\partial y} = (-2x,-2y,1) \tag{1}$$

cuya componente z es positiva.

El teorema de Stokes nos dice que (con la orientación adecuada para $\mathbf{r}$)

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Fácilmente se calcula que $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z)=(1,1,1)$. Tenemos así que:

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_\Omega (1,1,1).(-2x,-2y,1)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_\Omega (1-2x-2y)\,\mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \pi - 2\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi - 2\iint_B (\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)\rho^2\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) =$$

$$(B=\{(\rho,\vartheta):(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in\Omega\}=\{(\rho,\vartheta):\rho\leqslant 2\cos\vartheta,\ -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\})$$

$$= \pi - 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\vartheta}(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta = \pi - \frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta)\cos^3\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \pi - \frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = -\pi$$

b) Las dos superficies, el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=2x$, tienen la misma altura en los puntos del plano XY que verifican la igualdad $x^2+y^2=2x$ o, lo que es lo mismo, $(x-1)^2+y^2=1$. Por tanto, la curva intersección de dichas superficies es el conjunto de puntos

$$\left\{(x,y,z):(x-1)^2+y^2=1,\ z=2x\right\}$$

Pongamos $x-1=\cos t,\ y=\operatorname{sen}t$, con lo que la condición $(x-1)^2+y^2=1$ se satisface de forma automática y obtenemos que la curva viene dada por

$$\mathbf{r}(t)=(1+\cos t,\operatorname{sen}t,2+2\cos t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

Dicha curva tiene la orientación antihoraria que es la inducida por la normal interior (1), pues al recorrerla con la cabeza apuntando en la dirección de dicha normal (es decir, andando por encima del plano y empezando a subir por el lado de la izquierda) la superficie S queda a nuestra izquierda.

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(2+2\cos t,1+\cos t,\operatorname{sen}t).(-\operatorname{sen}t,\cos t,-2\operatorname{sen}t)\,\mathrm{d}t =$$

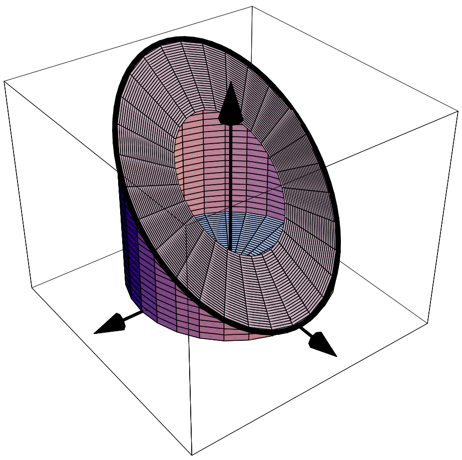
$$= \int_0^{2\pi}(-2\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}t\cos t+\cos t+\cos^2 t-2\operatorname{sen}^2 t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t = -\pi$$

4 Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz,yx,zy)$ a través de la superficie cerrada formada por la parte del cilindro (con sus dos tapaderas) $x^2+y^2=4$ comprendida entre los planos $z=0$ y $z+y=2$.

a) (1.25 puntos) Directamente (elige las orientaciones adecuadas para cada superficie).

b) (0.5 puntos) Usando el teorema de la divergencia.

Solución Pongamos $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz,yx,zy)$. El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_1 viene dado por



a) Poniendo $x=2\cos t$, $y=2\operatorname{sen} t$, la condición $x^2+y^2=4$ se satisface automáticamente y podemos representar los puntos del cilindro en la forma

$$\left\{(x,y,z): x^2+y^2\leqslant 4,\, z\in\mathbb{R}\right\}=\{(2\cos t,2\operatorname{sen} t,z): 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\, z\in\mathbb{R}\}$$

Sea S_1 la superficie formada por la parte del cilindro $x^2+y^2=4$ comprendida entre los planos $z=0$ y $z=2-y$. Deducimos que S_1 viene dada por

$$\gamma_1(t,z)=(2\cos t,2\operatorname{sen} t,z),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant 2-2\operatorname{sen} t$$

El vector
$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial t}\times\frac{\partial\gamma_1}{\partial z}=(2\cos t,2\operatorname{sen} t,0)$$
es la normal exterior a la superficie S_1.

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}.\,d\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2-2\operatorname{sen} t}\mathbf{F}(\gamma_1(t,z)).(2\cos t,2\operatorname{sen} t,0)\,dz\right]dt=4\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2-2\operatorname{sen} t}(z\cos^2 t+2\cos t\operatorname{sen}^2 t)\,dz\right]dt=$$
$$=8\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-2\operatorname{sen} t\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t+2\cos t\operatorname{sen}^2 t-2\cos t\operatorname{sen}^3 t)\,dt=$$
$$=8\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t)\,dt=10\pi$$

Sea S_2 la tapadera inferior del cilindro que está definida por

$$\gamma_2(\rho,t)=(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t,0),\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

Un vector normal a dicha superficie es
$$\frac{\partial\gamma_2}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}=(0,0,\rho)$$
que claramente se trata de la normal interior, por lo que el flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_2 viene dado por

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}.\,d\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\mathbf{F}(\gamma_2(\rho,t)).(0,0,-\rho)\,d\rho\right]dt=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(0,\rho^2\cos t\operatorname{sen} t,0).(0,0,-\rho)\,d\rho\right]dt=0$$

Sea S_3 la tapadera superior del cilindro que está definida por

$$\gamma_2(\rho,t)=(\rho\cos t,\rho\operatorname{sen} t,2-\rho\operatorname{sen} t),\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

Un vector normal a dicha superficie es

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial\rho}\times\frac{\partial\gamma_2}{\partial t}=(0,\rho,\rho)$$

que claramente se trata de la normal exterior, por lo que el flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S_3 viene dado por

$$\iint_{S_3}\mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\mathbf{F}(\gamma_3(\rho,t)).(0,\rho,\rho)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(\rho^3\cos t\,\mathrm{sen}\,t+2\rho^2\,\mathrm{sen}\,t-\rho^3\,\mathrm{sen}^2\,t)\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t=-4\pi$$

El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de $S_1\cup S_2\cup S_3$ es igual a $10\pi-4\pi=6\pi$.

b) El teorema de la divergencia afirma que el flujo saliente de un campo vectorial a través de una superficie cerrada que es la frontera de un dominio Ω en $\mathbb{R}^3$ es igual a la integral de la divergencia del campo en dicho dominio. En nuestro caso el dominio es

$$\Omega=\left\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant 2-y\right\}$$

y la divergencia del campo es $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)=x+y+z$. Notemos D el disco de centro $(0,0)$ y radio 2. El flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de Ω viene dado por

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)&=\iint_D\left[\int_0^{2-y}(x+y+z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}(x,y)=\iint_D\left(2+2x-xy-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}(x,y)=\\&=8\pi+\int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\left(2\rho\cos\vartheta-\rho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta-\frac{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho=\\&=8\pi-\frac{1}{2}\int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\rho^3\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho=8\pi-2\pi=6\pi\end{aligned}$$

5 a) (0.75 puntos) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica de periodo 2π dada por

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad t\in]-\pi,0]\\ t & \text{si}\quad t\in[0,\pi[\end{cases}$$

$f(\pi)=\pi/2$ y $f(t+2\pi)=f(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

b) (0.75 puntos) Justifica que para todo $t\in\mathbb{R}$ se verifica que la suma de la serie de Fourier de f es igual a $f(t)$ y deduce que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

Solución .a) Se calcula fácilmente, integrando por partes, que

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}t\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t=\frac{i}{2n}(-1)^n+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{n^2}\big((-1)^n-1\big)$$

y $c_0=\dfrac{\pi}{4}$. Deducimos que los coeficientes coseno y seno de f vienen dados por

$$\begin{aligned}a_n&=c_n+c_{-n}=\frac{1}{\pi n^2}\big((-1)^n-1\big)\Longrightarrow a_{2n}=0,\ a_{2n-1}=-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\\ b_n&=i(c_n-c_{-n})=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

y $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) La función f es periódica con periodo 2π y es derivable a trozos en $[-\pi,\pi]$. Además los únicos puntos de discontinuidad de f son los múltiplos impares de π, donde la función salta de 0 a π, y en dichos puntos la función se ha definido igual a $\pi/2$. Concluimos, en virtud del teorema de Riemann-Dirichlet, que la serie de Fourier de f converge en todo punto $t\in\mathbb{R}$ y su suma es igual a $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\operatorname{sen}(nt)) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nt) \tag{2}$$

Haciendo en esta igualdad $t=0$, obtenemos

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Haciendo en la igualdad (2) $t=\pi/2$, obtenemos

$$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}\operatorname{sen}((2n-1)\pi/2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

De donde se sigue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

6 Dado $a\in\mathbb{R}$, $a\notin\mathbb{Z}$, se define la función de periodo 2: $f(t) = \mathrm{e}^{i\pi a t}$ para $-1\leqslant t<1$ y $f(t) = f(t+2)$.

a) (0.5 puntos) Calcula la serie de Fourier de f.

b) (0.5 puntos) Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$.

Solución .a) Para todo $n\in\mathbb{Z}$ tenemos que:

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{i\pi a t}\,\mathrm{e}^{-i\pi n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{t(i\pi a - i\pi n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{1}{i\pi a - i\pi n}\left(\mathrm{e}^{i(\pi a-\pi n)} - \mathrm{e}^{-i(\pi a-\pi n)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{i\pi(a-n)}2i\operatorname{sen}(\pi a - \pi n) = (-1)^n\frac{\operatorname{sen}(\pi a)}{\pi(a-n)}$$

Deducimos que para $-1<t<1$ se verifica que

$$\mathrm{e}^{i\pi a t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{sen}(\pi a)}{\pi(a-n)}\mathrm{e}^{i\pi n t}$$

b) La identidad de Parseval afirma que

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

En nuestro caso será

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left|\mathrm{e}^{i\pi a t}\right|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1\,\mathrm{d}t = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi a)}{\pi^2(a-n)^2} \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$