

Soluciones de los ejercicios del examen de Cálculo del 29 de junio de 2007
Primero de Ingeniería de Telecomunicación

Ejercicio 1

a) Justifica que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

b) Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Solución.

a) Sea $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$. Se trata de probar que f se anula en exactamente dos puntos. La función f es continua y $f(0) = -1$, $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 + 1$. El teorema de Bolzano nos dice que f se anula en algún punto del intervalo $] -\pi, 0[$ y en algún punto del intervalo $]0, \pi[$. Luego f se anula al menos en dos puntos. Veamos que no puede anularse en más de dos puntos. En efecto, la derivada de f es $f'(x) = x(2 - \cos x)$. Como $2 - \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que la derivada f' solamente se anula en $x = 0$. Si la función f se anulara en tres o más puntos, en virtud del teorema de Rolle, su derivada debería anularse al menos en dos puntos, lo cual, según acabamos de ver, no ocurre. Concluimos que f se anula exactamente en dos puntos.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. Al ser $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$, la función f es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- , luego solamente puede anularse una vez en \mathbb{R}^- . Análogamente, como $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, la función f es estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ , luego solamente puede anularse una vez en \mathbb{R}^+ .

b) Sea $h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Como $h(-x) = h(x)$, y $h(0) = 0$, bastará probar que h es creciente en $[0, +\infty[$. Como $h'(x) = x - \operatorname{sen} x$ y $h''(x) = 1 - \cos x \geq 0$, se sigue que h' es creciente y, como $h'(0) = 0$, se sigue que $h'(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Luego h es creciente en $[0, +\infty[$. Finalmente, si $x \in \mathbb{R}$, se tendrá que o bien es $x \geq 0$ o bien es $-x \geq 0$. En cualquier caso, deducimos que $h(x) = h(-x) \geq h(0) = 0$, esto es $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

Ejercicio 2.

a) Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}$ y estudia la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \log(n \operatorname{sen}(1/n))$.

b) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n} 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (5+3n)}$ y calcula el límite de la sucesión $\frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

Solución.

a) Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (es la derivada de $\operatorname{sen} x$ en $x = 0$). Por tanto, el límite pedido es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3}$$

Este límite también es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos aplicar otra vez la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{6x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Por tanto, el límite pedido es igual a $-1/6$. Deducimos que para toda sucesión $\{x_n\} \rightarrow 0$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\right)}{x_n^2} = -\frac{1}{6}$$

En particular, haciendo $x_n = \frac{1}{n}$ obtenemos que

$$\lim \frac{-\log(n \operatorname{sen}(1/n))}{1/n^2} = \frac{1}{6}$$

Como la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ es convergente, por tratarse de una serie de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ con exponente $\alpha = 2 > 1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la serie de términos positivos $\sum_{n \geq 1} -\log(n \operatorname{sen}(1/n))$ es convergente y, por tanto, la serie $\sum_{n \geq 1} \log(n \operatorname{sen}(1/n))$ es convergente.

b) Se trata de una serie de términos positivos. Sea

$$a_n = \frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n} 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (5 + 3n)}$$

Tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+3}{3n+8} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/3}$$

El criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie pues $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$. Aplicaremos el criterio de Raabe. Para calcular el límite de la sucesión

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = (-n) \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

observamos que es de la forma $y_n(x_n - 1)$ donde $y_n = -n$ y $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$. En estas condiciones sabemos que

$$\lim x_n^{y_n} = e^L \iff \lim y_n(x_n - 1) = L$$

En nuestro caso

$$x_n^{y_n} = \left(\frac{3n+8}{3n+3}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/3} = \left(1 + \frac{5}{3n+3}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/3} \rightarrow e^{5/3} e^{1/3} = e^2$$

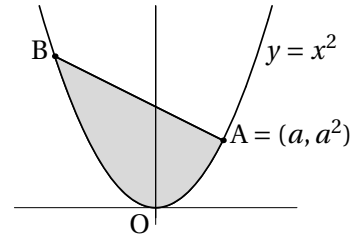
Luego el límite

$$\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 2$$

es mayor que 1 y la serie es convergente.

Ejercicio 3.

Calcula $a > 0$ por la condición de que el sector parabólico AOB sombreado en gris en la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y = x^2$ con su normal en el punto $A = (a, a^2)$.



Solución. Sabemos que la normal a una curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$. En nuestro caso la curva es la parábola $y = x^2$ cuya normal en el punto (a, a^2) es la recta $y = a^2 - \frac{1}{2a}(x - a)$. La intersección de dicha recta con la parábola se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 = a^2 - \frac{1}{2a}(x - a)$, esto es, $2ax^2 + x - a - 2a^3 = 0$, cuyas soluciones son

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(a + 2a^3)^2 2a}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8a^2 + 16a^4}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 4a^2)^2}}{4a} = \frac{-1 \pm (1 + 4a^2)}{4a} = \begin{cases} a \\ -\frac{1 + 2a^2}{2a} \end{cases}$$

Pongamos $x_0 = -\frac{1 + 2a^2}{2a}$. Tenemos que $B = (x_0, x_0^2)$. El área del sector parabólico de la figura viene dada por

$$G(a) = \int_{x_0}^a \left(a^2 - \frac{1}{2a}(x - a) - x^2 \right) dx = \left[a^2x - \frac{1}{4a}(x - a)^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=x_0}^{x=a} = \frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3}$$

Para calcular el mínimo de esta función se procede de la forma usual. Calculemos los ceros de la derivada.

$$G'(a) = 4a^2 + 1 - \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{16a^4} = 0 \iff 4a^2 + 1 = \frac{1}{4a^2} \left(1 + \frac{1}{4a^2} \right) = \frac{1}{16a^4} (4a^2 + 1) \iff 16a^4 = 1 \iff a^4 = \frac{1}{16}$$

Como $a > 0$, la única solución es $a = 1/2$. Teniendo en cuenta que $G''(a) = 8a + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^5} > 0$ para todo $a > 0$ y que $\lim_{a \rightarrow 0} G'(a) = -\infty$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} G'(a) = +\infty$, deducimos que para $0 < a < \frac{1}{2}$ es $G'(a) < 0$ y para $\frac{1}{2} < a$ es $G'(a) > 0$. De aquí se sigue que G decrece en $]0, 1/2[$ y crece en $[1/2, +\infty[$, por lo que alcanza un mínimo absoluto en $a = 1/2$.

Ejercicio 4. Calcula la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx$.

Solución. Por definición

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx$$

Para calcular la integral

$$\int_1^t \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx \quad (t > 1)$$

usaremos la regla de Barrow. Calculemos una primitiva de la función

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)}$$

se trata de una función racional. Como el polinomio $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Multiplicando e identificando numeradores

$$1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x$$

Haciendo $x = 0$ obtenemos $A = 1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A + B = 0$, por lo que $B = -1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A + C = 0$, luego $C = -1$.

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx &= \int_1^t \frac{1}{x} dx - \int_1^t \frac{x+1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log(t) - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log(t) - \frac{1}{2} \log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{1}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \\ &= \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\right) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

concluimos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2 + x + 1)} dx = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18} \pi$$

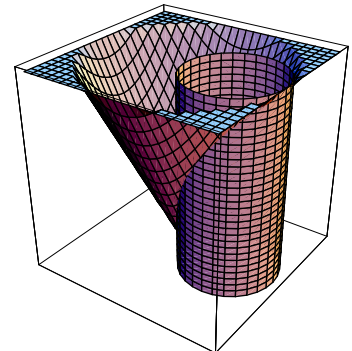
Ejercicio 5. Sea $a > 0$. Calcula el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = ax$, que está comprendido entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución.

Se trata de calcular el volumen del sólido

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a/2)^2 + y^2 \leq a^2/4, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Dicho sólido es la parte de \mathbb{R}^3 que queda dentro del cilindro circular recto de base la circunferencia en el plano XY de centro $(a/2, 0)$ y radio $a/2$ y que está limitado superiormente por la gráfica del cono de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Puedes ver el cono y el cilindro en la gráfica de la derecha.



Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen viene dado por

$$\text{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y)$$

donde

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax\} = \{(x, y) : (x - a/2)^2 + y^2 \leq a^2/4\}$$

es el disco de centro $(a/2, 0)$ y radio $a/2$. La simetría polar de la función a integrar indica que es conveniente hacer un cambio de variable a polares $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$.

$$\text{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, d(x, y) = \iint_B \rho^2 \, d(\rho, t)$$

donde

$$B = \{(\rho, t) : (\rho \cos t, \rho \sin t) \in D\} = \{(\rho, t) : \rho \leq a \cos t\} = \{(\rho, t) : -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \rho \leq a \cos t\}$$

Usando ahora el teorema de Fubini, tenemos

$$\text{Vol}(A) = \iint_B \rho^2 \, d(\rho, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{a \cos t} \rho^2 \, d\rho \right] dt = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \, dt = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t (1 - \sin^2 t) \, dt = \frac{4a^3}{9}$$

Ejercicio 6. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$ en el conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 4x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Solución. El conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ es la parte de la elipse centrada en el origen de semiejes 1 y 2 que queda en el semiplano superior. Se trata de un conjunto compacto (cerrado porque incluye a su frontera y acotado) y, como la función f es continua, el teorema de Weierstrass asegura que f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en M . Dichos extremos deben alcanzarse o bien en el interior de M o en la frontera de M . Los puntos del interior de M que sean extremos locales de f tienen que ser puntos críticos de f , es decir, deben ser puntos de M donde se anule el gradiente de f .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x - 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 3 = 0$$

Por tanto, f tiene un único punto crítico que es $(1/2, 3/2)$ el cual, efectivamente, está en M .

Los extremos absolutos de f en M pueden alcanzarse en la frontera de M . La frontera de M está formada por la parte superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ y por el segmento $\{(x, 0), -1 \leq x \leq 1\}$. Los extremos de f en este segmento son fáciles de calcular pues son los extremos de la función $h(x) = f(x, 0) = 4x^2 - 4x$ donde $x \in [-1, 1]$. Como $h'(x) = 8x - 4$, los únicos posibles valores extremos de f en el segmento son $h(1/2) = f(1/2, 0)$, $h(-1) = f(-1, 0)$ y $h(1) = f(1, 0)$.

Finalmente calculemos los valores extremos de f en la parte superior de la elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Para ello los calculamos en toda la elipse y nos quedaremos con las soluciones que estén en el semiplano superior. Nuestro problema, pues, es calcular los extremos de f con la condición $g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$. Se trata de un problema de extremos condicionados. Formamos la función de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$$

y calculamos sus puntos críticos que serán las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 8x - 4 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - 3 + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (4 + \lambda)x = 2 \\ (4 + \lambda)y = 6 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones deducimos que debe ser $4 + \lambda \neq 0$ y que $3x = y$. Sustituyendo esta igualdad en la tercera ecuación resulta

$$13x^2 = 4 \iff x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Lo que nos proporciona una única solución positiva para $y = \frac{6}{\sqrt{13}}$. Obtenemos así que los posibles extremos de f en la parte superior de la elipse tienen que alcanzarse en el punto $(2/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13})$.

Finalmente, calculemos los valores de f en todos los posibles puntos extremos.

$$f(1/2, 3/2) = -\frac{13}{4}, f(1/2, 0) = -1, f(-1, 0) = 8, f(1, 0) = 0, f(2/\sqrt{13}, 6/\sqrt{13}) = 4 - 2\sqrt{13}$$

El valor máximo absoluto de f en M es igual a 8 y se alcanza en el punto $(-1, 0)$. El valor mínimo absoluto de f en M es $-\frac{13}{4}$ y se alcanza en el punto $(1/2, 3/2)$.

Ejercicio 7. Justifica que la ecuación $z \operatorname{sen}(xy) + \cos(zx) - z^2y + 3 = 0$ define implícitamente a z como función de (x, y) en un entorno del punto $(0, 1, 2)$. Calcula el plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$ en el punto $(0, 1, 2)$.

Solución. Pongamos $f(x, y, z) = z \operatorname{sen}(xy) + \cos(zx) - z^2y + 3$. Tenemos que $f(0, 1, 2) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) - x \operatorname{sen}(zx) - 2zy$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 2) = -4 \neq 0$. El teorema de la función implícita garantiza que hay una función $z = z(x, y)$ definida en un abierto U que contiene al punto $(0, 1)$ verificando que $z(0, 1) = 2$ y $f(x, y, z(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in U$.

El plano tangente a la gráfica de la función $z = z(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ es el plano tangente a la superficie definida implícitamente por $f(x, y, z) = 0$ en el punto $(0, 1, 2)$. Sabemos que dicho plano tiene la ecuación cartesiana $\langle \nabla f(0, 1, 2) | (x, y - 1, z - 2) \rangle = 0$, donde $\nabla f(0, 1, 2)$ es el vector gradiente de f calculado en el punto $(0, 1, 2)$. Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (zy \cos(xy) - z \operatorname{sen}(zx), zx \cos(xy) - z^2, \operatorname{sen}(xy) - x \operatorname{sen}(zx) - 2zy)$$

luego $\nabla f(0, 1, 2) = (2, -4, -4)$. Por tanto la ecuación del plano tangente pedido es

$$\langle (2, -4, -4) | (x, y - 1, z - 2) \rangle = 0 \iff x - 2y - 2z + 6 = 0$$

Alternativamente, podemos razonar como sigue. El plano tangente a la gráfica de $z = z(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ viene dado por

$$z - z(0, 1) = \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)(y - 1)$$

Puesto que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1, 2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 2)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 2)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 2)} = -1$$

Obtenemos que la ecuación de dicho plano es

$$z - 2 = \frac{1}{2}x - (y - 1) \iff x - 2y - 2z + 6 = 0$$

la cual, naturalmente, coincide con la antes obtenida.

Ejercicio 8.

a) Determina el valor de k para que la ecuación diferencial $(2xy^2 + ye^x) dx + (2x^2y + ke^x - 1) dy = 0$ sea exacta. Resolver la ecuación para dicho valor.

b) Resolver la ecuación diferencial de valores iniciales $y'' - y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución.

a) Pongamos $P(x, y) = 2xy^2 + ye^x$, $Q(x, y) = 2x^2y + ke^x - 1$. La ecuación diferencial es exacta cuando

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \iff 4xy + ke^x = 4xy + e^x \iff k = 1$$

Supuesto ya que $k = 1$, sabemos que la solución general de dicha ecuación diferencial viene dada por la familia de curvas implícitamente definida por $f(x, y) = c$ donde c es una constante y $f(x, y)$ es una función tal que

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

La primera de estas condiciones implica, por la regla de Barrow, que

$$\int_0^x \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) dt = f(x, y) - f(0, y) = \int_0^x P(t, y) dt = \int_0^x (2ty^2 + ye^t) dt = x^2y^2 + ye^x - y$$

Pongamos $h(y) = f(0, y)$. Luego $f(x, y) = h(y) + x^2y^2 + ye^x - y$. Derivando respecto a y esta igualdad y teniendo en cuenta la segunda condición deberá verificarse que

$$Q(x, y) = h'(y) + 2x^2y + e^x - 1 \iff h'(y) = Q(x, y) - 2x^2y - e^x + 1 = 0$$

Por lo que h debe ser una función constante. Concluimos que la solución general de la ecuación diferencial es la familia de curvas dada por $x^2y^2 + ye^x - y = c$.

b) Calculemos primero la solución general de la ecuación homogénea. La ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$. Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es la familia de curvas $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Calculemos ahora una solución particular de la ecuación diferencial completa. Usaremos para ello el método de los coeficientes indeterminados. Teniendo en cuenta la forma del término general, la ecuación debe admitir una solución particular de la forma $y_p = cx e^{2x}$ para un valor de c que se calcula de forma que se verifique la igualdad

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = e^{2x}$$

Haciendo los sencillos cálculos obtenemos que $c = 1/3$. La solución general de la ecuación diferencial completa es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} x e^x$$

Finalmente, calculemos C_1 y C_2 por las condiciones iniciales.

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 2C_1 - C_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

La solución única de este sistema de ecuaciones es $C_1 = -C_2 = -\frac{1}{9}$. La solución pedida es por tanto

$$sol(x) = -\frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^x$$