Licenciatura en Matemáticas
Soluciones del examen parcial de Cálculo de junio de 2002

Problema 1 (2 puntos). Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2(x-\sqrt{x}\,)^2}, \qquad (x\in\mathbb{R}_o^+,\ n\in\mathbb{N})$$

(a) Calcular el campo de convergencia puntual de la sucesión así como la función límite. ¿Hay convergencia uniforme en todo el campo de convergencia puntual?

(b) Estudiar la convergencia uniforme en los intervalos de la forma $[\alpha,\beta]$, donde $0<\alpha<\beta<1$.

Solución. (a) Para $x\neq 0$ y $x\neq 1$, se tiene que $(x-\sqrt{x})^2>0$ y, por tanto, $-n^2(x-\sqrt{x})^2\to-\infty$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$. Como, además, para todo $n\in\mathbb{N}$ es $f_n(0)=f_n(1)=1$, se sigue que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge para todo $x\in\mathbb{R}_o^+$. Por tanto, el campo de convergencia puntual de $\{f_n\}$ es $\mathbb{R}_o^+$. La función límite, $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ viene dada por:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=\begin{cases}1 & \text{si } x=0 \text{ o si } x=1\\ 0 & \text{si } 0\neq x\neq 1\end{cases}$$

Es sabido que la convergencia uniforme conserva la continuidad. Como en $\mathbb{R}_o^+$ las funciones f_n son continuas y la función límite es discontinua, concluimos que la sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$.

(b) Sea $0<\alpha<\beta<1$. Para todo $x\in[\alpha,\beta]$ se tiene que $f(x)=0$ por lo que $|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$. En consecuencia

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in[\alpha,\beta]\}=\sup\{f_n(x):x\in[\alpha,\beta]\}=\max\{f_n(x):x\in[\alpha,\beta]\}$$

Donde se ha usado que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo absoluto en dicho intervalo. Como $f_n(x)=\exp(-n^2(x^2+x-2x\sqrt{x}))$ es derivable, su máximo absoluto en $[\alpha,\beta]$ se alcanzará o bien en los extremos del intervalo, α, β, o en algún punto de $]\alpha,\beta[$ donde se anule la derivada. Como

$$f_n'(x)=-n^2(2x+1-3\sqrt{x})\exp(-n^2(x^2+x-2x\sqrt{x}))=-n^2(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)\exp(-n^2(x^2+x-2x\sqrt{x}))$$

se sigue que los únicos puntos donde se anula la derivada son $x=1$ y $x=1/4$. Además $f_n'(x)<0$ para $0<x<1/4$ y $f_n'(x)>0$ para $1/4<x<1$. Deducimos que f_n tiene un mínimo relativo en $x=1/4$ (de hecho, en $x=1/4$ la función f_n alcanza su mínimo absoluto en el intervalo $[0,1]$). Concluimos que

$$\max\{f_n(x):x\in[\alpha,\beta]\}=\max\{f_n(\alpha),f_n(\beta)\}$$

y, puesto que $\{f_n(\alpha)\}$ y $\{f_n(\beta)\}$ convergen a cero, deducimos que $\max\{f_n(x):x\in[\alpha,\beta]\}\to 0$, esto es, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\alpha,\beta]$.

Problema 2 (2 puntos). Comprobar que la ecuación

$$xyz+\operatorname{sen}(z-6)-2(x+y+x^2y^2)=0$$

define a z como función implícita de (x,y) en un entorno de $(1,1)$, con $z(1,1)=6$. Comprobar que $(1,1)$ es un punto crítico de la función $z=z(x,y)$ y decir si se trata de un máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución. Pongamos $f(x,y,z) = xyz + \operatorname{sen}(z-6) - 2(x+y+x^2y^2)$ que es una función con derivadas parciales continuas de todo orden. Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + \cos(z-6)$, por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,6) = 2 \neq 0$. Como, además, $f(1,1,6) = 0$, el teorema de la función implícita garantiza que hay una función con derivadas parciales continuas de todo orden, $(x,y) \mapsto z(x,y)$, definida en un entorno, U, de $(1,1)$ tal que $z(1,1) = 6$, y

$$f(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in U.$$

Derivando esta identidad tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = yz - 2(1+2xy^2) + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = xz - 2(1+2x^2y) + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Donde las derivadas parciales de la función implícita $z = z(x,y)$ están calculadas en un punto $(x,y) \in U$ y las de f están calculadas en el punto $(x,y,z(x,y))$. Haciendo $x = y = 1$, $z = z(1,1) = 6$, en las igualdades anteriores, se obtiene que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$, esto es, $(1,1)$ es un punto crítico de $z = z(x,y)$.
Derivando respecto a x la identidad (1) tenemos que:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - 4y^2 + \left(y - \operatorname{sen}(z-6)\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

Derivando respecto a y la identidad (2) tenemos que:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - 4x^2 + \left(x - \operatorname{sen}(z-6)\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Derivando respecto a y la identidad (1) tenemos que:

$$z + y\frac{\partial z}{\partial y} - 8xy + \left(x - \operatorname{sen}(z-6)\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + (xy + \cos(z-6))\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Haciendo $x = y = 1$, $z = 6$, en estas igualdades y teniendo en cuenta que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = 1$$

Por tanto, la matriz hesiana de $z = z(x,y)$ en el punto $(1,1)$ es igual a

$$\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

cuyos dos determinantes principales son positivos, por lo que la función $z = z(x,y)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(1,1)$.

Problema 3 (1 punto). Sea $u = x^4y + y^2z^3 + \varphi(x/y)$, donde

$$\begin{cases} x = 1 + rs\,\mathrm{e}^t \\ y = rs^2\,\mathrm{e}^{-t} \\ z = r^2 s \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$, sabiendo que $\varphi'(3/2) = -1$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= \big(4x^3y+\varphi'(x/y)1/y\big)\,r\,\mathrm{e}^t+\big(x^4+2yz^3+\varphi'(x/y)(-x/y^2)\big)\,2rs\,\mathrm{e}^{-t}+3y^2z^2r^2\operatorname{sen}t\end{aligned}$$

Para $r=2$, $s=1$, $t=0$ se tiene que $x=3$, $y=2$, $z=0$. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, así como $\varphi'(3/2)=-1$, resulta que $\dfrac{\partial u}{\partial s}=758$.

Problema 4 (2 puntos). Hallar los puntos de la curva

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2-z^2=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

que están más próximos al origen de coordenadas.

Solución. El problema consiste en calcular los puntos donde la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ alcanza un mínimo absoluto cuando las variables x,y,z verifican las condiciones:

$$\begin{aligned} x^2-xy+y^2-z^2&=1\\ x^2+y^2&=1\end{aligned}$$

Se trata, pues, de un problema de extremos condicionados. Lo primero que observamos es que las dos condiciones anteriores pueden escribirse de forma equivalente como:

$$\begin{aligned} xy+z^2&=0\\ x^2+y^2-1&=0\end{aligned}$$

La función de Lagrange es $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xy+z^2)+\mu(x^2+y^2-1)$. Calculemos los puntos críticos de la función de Lagrange.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x+y\lambda+2x\mu=0 && (1)\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y+x\lambda+2y\mu=0 && (2)\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2z+2z\lambda=0 && (3)\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xy+z^2=0 && (4)\\
\frac{\partial F}{\partial \mu} &= x^2+y^2-1=0 && (5)
\end{aligned}$$

La ecuación (3), que puede escribirse $z(1+\lambda)=0$, conduce a una disyuntiva: o bien es $z=0$ o $z\neq 0$ y $\lambda=-1$. Consideremos ambas posibilidades.

$$z=0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} xy=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \overset{(5)\wedge(1)\wedge(2)}{\Longrightarrow} y=\pm 1,\ \lambda=0,\ \mu=-1\\ y=0 \overset{(5)\wedge(2)\wedge(1)}{\Longrightarrow} x=\pm 1,\ \lambda=0,\ \mu=-1\end{cases}$$

Obtenemos así los puntos $(\pm 1,0,0,0,-1)$ y $(0,\pm 1,0,0,-1)$.

$$z \neq 0 \overset{(3)\wedge(4)}{\Longrightarrow} \lambda = -1,\, xy < 0 \overset{(1)\wedge(2)}{\Longrightarrow} 1 = \frac{2x(1+\mu)}{y} = \frac{2y(1+\mu)}{x}$$
$$\Longrightarrow x^2 = y^2 \overset{(5)}{\Longrightarrow} x = -y = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \overset{(1)\wedge(4)}{\Longrightarrow} \mu = \frac{-3}{2},\, z = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

Obtenemos así los puntos $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2},-1,-3/2)$ y $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2},-1,-3/2)$. Por tanto, los puntos de la curva dada que están más próximos al origen hay que buscarlos entre los puntos $a = (\pm 1,0,0)$, $b = (0,\pm 1,0)$, $c = (1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2})$, $d = (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2})$. Como $f(a) = f(b) = 1 < f(c) = f(d) = 3/2$, se sigue que los puntos buscados son los puntos $a = (\pm 1,0,0)$ y $b = (0,\pm 1,0)$.

Comentario 1. Observa que la curva dada

$$\Gamma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : xy + z^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^3$ pues Γ es un conjunto cerrado y también acotado. Como la función f es continua, el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos garantiza que f alcanza en Γ un valor máximo y un valor mínimo absolutos. El valor mínimo lo alcanza f en los puntos a y b, y el valor máximo en los puntos c y d.

Comentario 2. También se puede resolver este ejercicio como sigue. Se trata de calcular los puntos de la curva Γ donde f alcanza un valor mínimo. Dicho, en otros términos, calcular los puntos donde la función *restricción* de f a Γ, $h = f_{|\Gamma}$, alcanza un valor mínimo. Como para $(x,y,z)\in\Gamma$ es $x^2+y^2 = 1$, tenemos que $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1+z^2$ que, evidentemente, alcanza un valor mínimo cuando $z = 0$. Volvemos a obtener así los puntos a y b.
Observa también que $h(x,y,z) = 1+z^2$ será máximo cuando lo sea $|z| = |xy|$. Por tanto, el máximo de h se alcanza cuando $|xy|$ es máximo con la condición de que $x^2+y^2 = 1$. Pero es bien sabido que $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ y se alcanza la igualdad si, y sólo si, $|x| = |y|$. Las condiciones $|x| = |y|$, $x^2+y^2 = 1$ y $z^2 = -xy$ llevan a obtener como puntos de máximo para f *en* Γ los puntos c y d.

Problema 5 (2 puntos). Calcular la integral

$$\iiint\limits_A \mathrm{e}^z\, d(x,y,z) \qquad \text{donde } A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 \leqslant 2xz,\ x^2+y^2 \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

Solución. Observa que

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leqslant 2x,\ x^2+y^2 \leqslant 2xz,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2 \leqslant 1,\ (x^2+y^2)/2x \leqslant z \leqslant 2\right\} \end{aligned}$$

Representando por $D((1,0),1)$ el disco en $\mathbb{R}^2$ de centro en $(1,0)$ y radio 1, tenemos que:

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D((1,0),1),\ \ (x^2+y^2)/2x \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

Por tanto, A es un conjunto de tipo I en $\mathbb{R}^3$. Tenemos, aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_A \mathrm{e}^z\, d(x,y,z) &= \iint\limits_{D((1,0),1)} \left[\int\limits_{(x^2+y^2)/2x}^{2} \mathrm{e}^z\, dz\right] d(x,y) = \iint\limits_{D((1,0),1)} \left(\mathrm{e}^2 - \exp\left((x^2+y^2)/2x\right)\right) d(x,y) \\ &= \mathrm{e}^2\pi - \iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right) d(x,y) \end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\displaystyle\iint\limits_{D((1,0),1)} d(x,y) = \pi$ (área del círculo $D((1,0),1)$).
Para calcular la última integral pasamos a coordenadas polares. Tenemos

$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\big((x^2+y^2)/2x\big)\, d(x,y) = \iint\limits_{B} \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta)$$

Donde

$$\begin{aligned} B &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in D((1,0),1)\big\} = \\ &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta \leqslant 1\big\} = \\ &= \big\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : \rho\leqslant 2\cos\vartheta, -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\big\} \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando otra vez el teorema de Fubini, resulta:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{B} \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta) &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int\limits_{0}^{2\cos\vartheta} \rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d\rho\right] d\vartheta \\ &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta d\vartheta = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos(2\vartheta))d\vartheta = 2\pi \end{aligned}$$

Donde,integrando por partes, hemos calculado que $\mathrm{e}^{\rho/\lambda}(\lambda\rho-\lambda^2)$ es una primitiva de $\rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}$, por lo que $\displaystyle\int\limits_0^\lambda \rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}\, d\rho = \lambda^2$. Naturalmente, $\lambda = 2\cos\vartheta$. Conluimos finalmente que:

$$\iiint\limits_{A} \mathrm{e}^z \; d(x,y,z) = e^2\pi - 2\pi = (e^2-2)\pi$$

Comentario1. Alternativamente, podemos aplicar el teorema de Fubini integrando por secciones de altura fija. Tenemos que

$$A = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A(z),\ 0\leqslant z\leqslant 2\big\}$$

donde

$$A(z) = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ (x-z)^2+y^2\leqslant z^2\big\} = D((1,0),1)\cap D((z,0),z)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{A} \mathrm{e}^z \; d(x,y,z) &= \int\limits_0^2 \left[\iint\limits_{A(z)} \mathrm{e}^z\, d(x,y)\right] dz = \int\limits_0^1 \left[\iint\limits_{D((z,0),z)} \mathrm{e}^z\, d(x,y)\right] dz + \int\limits_1^2 \left[\iint\limits_{D((1,0),1)} \mathrm{e}^z\, d(x,y)\right] dz = \\ &= \int\limits_0^1 \pi z^2\,\mathrm{e}^z\, dz + \int\limits_1^2 \pi\,\mathrm{e}^z\, dz = \pi(\mathrm{e}-2)+\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}) = (e^2-2)\pi \end{aligned}$$

Problema 6 (1 punto). Resolver la ecuación diferencial $2x+y^2+xyy'=0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $\mu=\mu(x)$.

Solución. Escribiendo la ecuación de la forma $(2x+y^2)dx+xydy=0$, la condición para que $\mu=\mu(x)$ sea un factor integrante es que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(2x+y^2))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)xy)$$

Por tanto $\mu=\mu(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $2y\mu(x)=y\mu(x)+xy\mu'(x)$, esto es, $\mu(x)=x\mu'(x)$ la cual, evidentemente, se verifica para $\mu(x)=x$.
Multiplicando por $\mu(x)=x$ la ecuación diferencial dada, obtenemos la ecuación $(2x^2+xy^2)dx+x^2ydy=0$ que ya es una ecuación diferencial exacta cuya solución, dada implícitamente en la forma $\varphi(x,y)=C$, se calcula de la manera usual. Deberá cumplirse que:

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=2x^2+xy^2\Longrightarrow\varphi(x,y)=\int(2x^2+xy^2)dx+h(y)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y^2+h(y)$$

donde $h(y)$ es una función de y que calculamos por la condición

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=x^2y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y^2+h(y)\right)=x^2y+h'(y)\Longrightarrow h'(y)=0$$

Luego $h(y)$ es una función constante. Concluimos que la solución de la ecuación diferencial es la familia de curvas dada implícitamente por $4x^3+3x^2y^2=C$ donde C es una constante arbitraria.