Departamento de Análisis Matemático

Licenciatura en Matemáticas. 2º parcial 2001. Cálculo.

Problema 1. (a) Sea $u = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$ donde $x = rs\,\mathrm{e}^{-t}$, $y = rs\log(1+t^2)$, $z = r^2 s\cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

(b) Sea $z = z(x,y)$ la función dada implícitamente por

$$3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0.$$

Calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en el punto $(2,1)$ siendo $z(2,1) = 2$.

Solución. (a) Todo lo que hay que hacer es aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \\ &= (4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2)r\,\mathrm{e}^{-t} + (4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3)r\log(1+t^2) + 3y^2(z+x)^2r^2\cos t\end{aligned}$$

Para $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ tenemos que $x = 2$, $y = 0$, $z = 4$, y por tanto, $\dfrac{\partial u}{\partial s}(2,1,0) = 64$.

(b) Derivando respecto a x la identidad que define implícitamente a $z = z(x,y)$ obtenemos:

$$6xy^2 + 4z\frac{\partial z}{\partial x}xy + 2z^2y - 2\frac{\partial z}{\partial x}x^3 - 6x^2z + 4\frac{\partial z}{\partial x}y^3 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Derivando la identidad anterior respecto a y obtenemos:

$$12xy + 4\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}xy + 4z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}xy + 4z\frac{\partial z}{\partial x}x + 4z\frac{\partial z}{\partial y}y + 2z^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}x^3 - 6x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}y^3 + 12\frac{\partial z}{\partial x}y^2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Observamos que para calcular la derivada parcial pedida necesitamos calcular antes las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Derivando respecto a y la identidad que define implícitamente a $z = z(x,y)$ obtenemos:

$$6x^2y + 4z\frac{\partial z}{\partial y}xy + 2z^2x - 2\frac{\partial z}{\partial y}x^3 + 4\frac{\partial z}{\partial y}y^3 + 12zy^2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

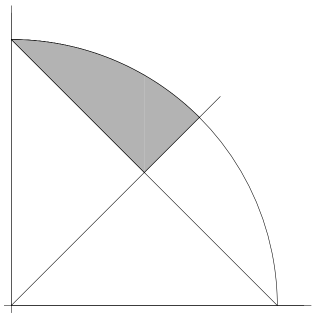
Sustituyendo en (i) y (iii) $x = 2, y = 1, z = 2$ calculamos fácilmente $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 7$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,1) = -16$. Sustituyendo ahora en (ii) obtenemos finalmente que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,1) = 103$.

Problema 2. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2}\, d(x,y)$ donde $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 1,\; x+y \geqslant 1,\; y \geq x\right\}$.

(b) $\displaystyle\iiint_A \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y,z)$ donde A es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

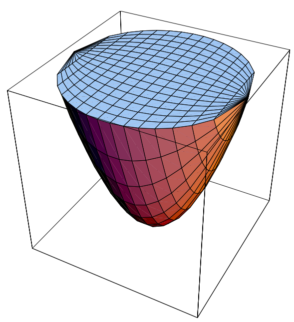
Solución. (a) La región A se muestra sombreada en la figura de la izquierda. La función que hay que integrar sugiere un cambio a coordenadas polares. La descripción de A en coordenadas polares es fácil:



$$A = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) : \pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ \frac{1}{\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta} \leqslant \rho \leqslant 1\right\}$$

Por tanto:

$$\iint\limits_A (x^2+y^2)^{-3/2} d(x,y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\int_{\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta}}^{1} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho\right] d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta - 1)\,d\theta = 1 - \frac{\pi}{4}$$



(b) A la izquierda se ha representado el paraboloide cortado por el plano $z = 4$. Observa que A es un conjunto de *tipo I* en $\mathbb{R}^3$. De hecho, como la proyección de A sobre el plano XY es el disco centrado en 0 de radio 2, $D(0,2)$, tenemos $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant 4,\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4\}$. En consecuencia:

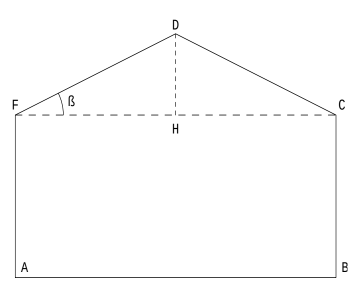
$$\iiint\limits_A \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} d(x,y,z) = \iint\limits_{D(0,2)} \left[\int_{x^2+y^2}^{4} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right] d(x,y) =$$

$$= \iint\limits_{D(0,2)} \left(\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}(4-(x^2+y^2))\right) d(x,y) =$$

(pasando a coordenadas polares e integrando por partes para calcular una primitiva de $\rho^2 e^\rho$)

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^2 \frac{e^\rho}{\rho}(4-\rho^2)\rho\,d\rho\right] d\theta = 2\pi \int_0^2 (4e^\rho - \rho^2 e^\rho)\,d\rho = 4\pi(e^2-1)$$

Problema 3. Se quiere construir un pentágono colocando un triángulo isósceles sobre un rectángulo, como se muestra en la siguiente figura. Si el pentágono tiene un perímetro fijo P_0, determinar las longitudes de los lados del pentágono que maximizan su área.



Solución. Llamando x la longitud del lado AB, y la longitud de BC, z la longitud de CD, el área del pentágono viene dada por:

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4}$$

función que hay que maximizar con la condición de que $x + 2y + 2z - P_0 = 0$. Formamos la función de Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4} + \lambda(x + 2y + 2z - P_0)$$

Calculamos los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4} - \frac{x^2}{8}\frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2/4}} + \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2/4}} + 2\lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y + 2z - P_0 = 0 \tag{4}$$

Sustituyendo $2\lambda = -x$ en (3) obtenemos $x\left(\dfrac{z}{2\sqrt{z^2 - x^2/4}} - 1\right) = 0$, y como debe ser $x > 0$, se sigue que $\dfrac{z}{2\sqrt{z^2 - x^2/4}} - 1 = 0$, lo que implica que $x^2 = 3z^2$ y, por tanto $\sqrt{z^2 - x^2/4} = \dfrac{z}{2}$. Sustituyendo ahora en (1) y teniendo en cuenta que $y = P_0/2 - z - x/2 = P_0/2 - z - \sqrt{3}z/2$, obtenemos:

$$\frac{P_0}{2} - z - \sqrt{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3z}{4} = 0$$

de donde resulta $z = \dfrac{P_0(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}$, $x = (2 - \sqrt{3})P_0$, $y = \dfrac{P_0(3 - \sqrt{3})}{6}$.

Si has llegado hasta aquí tu ejercicio está bien hecho.

Nota. No es necesario que leas lo que sigue, salvo que quieras saber cómo puedes justificar que los valores antes obtenidos corresponden efectivamente al pentágono de máxima area. Para ello puedes razonar como sigue. El conjunto $K = \{(x,y,z) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, z^2 \geqslant x^2/4, x + 2y + 2z \leqslant P_0\}$ es compacto, por lo que f tiene que alcanzar un máximo y un mínimo absolutos en K. Pero como en el interior de K, es decir en el conjunto $\{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0, z^2 > x^2/4, x + 2y + 2z < P_0\}$, la función f no tiene puntos críticos (cualquier punto crítico de f debe cumplir que $x = 0$), *deducimos que dichos valores máximo y mínimo deben alcanzarse en la frontera de* K. Ahora bien, en la frontera de K es $xyz = 0$, o $z = x/2$ *en ambos casos no hay pentágono* o es $x + 2y + 2z = P_0$. Concluimos que el máximo absoluto de f en K se alcanza en el plano $x + 2y + 2z = P_0$ y, por tanto es el punto que hemos obtenido anteriormente.

Para hacer este ejercicio pueden tomarse como variables x, y y el ángulo β; y también x, y y la longitud, h, del segmento DH. En ambos casos el sistema que resulta no tiene ninguna dificultad particular.

Problema 4. Estudiar, según los valores del parámetro real α, la convergencia uniforme en $[0,1]$ de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+nx^2} \qquad x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Empezaremos estudiando la convergencia puntual en $[0,1]$. Es claro que para $0<x$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge a 0 si $\alpha < 1$, converge a $1/x$ si $\alpha = 1$ y si $\alpha > 1$ diverge positivamente. Por tanto, si $\alpha > 1$ ni siquiera hay convergencia puntual, por lo que *consideraremos en lo que sigue que* $\alpha \leqslant 1$. Pongamos $f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$. Tenemos que $f(0)=0$, y para $0<x\leqslant 1$ es $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$

Caso $\alpha = 1$. Recordando que la convergencia uniforme conserva la continuidad, como para $\alpha = 1$ la función f no es continua en $[0,1]$, deducimos que la sucesión no converge uniformemente en $[0,1]$.

Caso $\alpha < 1$. Derivando obtenemos que $f_n'(x) = n^\alpha \dfrac{1-x^2 n}{(1+nx^2)^2}$ de donde fácilmente se deduce que f_n alcanza su máximo absoluto en $[0,1]$ en el punto $x_n = 1/\sqrt{n}$. Por tanto, la convergencia será uniforme si y, sólo si, $\max\{|f_n(x)-f(x)| : x\in[0,1]\} = f_n(1/\sqrt{n}) = \dfrac{n^{\alpha-1/2}}{2}$ converge a 0, lo que ocurre, si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Nota. Si no se te ocurre razonar en el caso $\alpha = 1$ como lo hemos hecho, también puedes hacerlo directamente. Considera la función $h_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Tienes que para $0<x\leqslant 1$, $h_n(x) = 1/x - f_n(x)$. Comprueba que la deriva de $h_n(x)$ es negativa en $]0,1]$. En consecuencia, h_n es decreciente en $]0,1]$. Como $h_n(1)>0$, deducimos que $h_n(x)>0$ para $0<x\leqslant 1$, por lo que:

$$\sup\{h_n(x) : x\in[0,1]\} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h_n(x) = +\infty$$

Lo que prueba que no hay convergencia uniforme en $[0,1]$ (aunque sí hay convergencia uniforme en intervalos del tipo $[\rho,1]$ con $0<\rho<1$).

Problema 5. (Opcional grupos B y C) Una curva de la forma $y=y(x)$ verifica la siguiente propiedad: para cada punto (x,y) de la curva, el punto medio (a,b) del segmento de recta tangente comprendido entre (x,y) y el eje OY verifica $b=2a^2$. Hallar la curva sabiendo que pasa por el punto $(1,2)$.

Solución. La ecuación de la tangente a la curva en un punto genérico (x,y) de la misma viene dada por $Y-y=y'(X-x)$. El corte con el eje OY se obtiene haciendo $X=0$, con lo que $Y=y-xy'$. Por tanto el punto de corte de la tangente con el eje OY viene dado por $(0,y-xy')$. El punto medio del segmento cuyos extremos son dicho punto y el punto (x,y) viene dado por

$$1/2(x,y)+1/2(0,y-xy') = (x/2, y-xy'/2)$$

En consecuencia, deberá verificarse que $y-xy'/2 = x^2/2$; es decir, $xy'-2y+x^2=0$, la cual, dividiendo por x, podemos escribir como $y'-2y/x+x=0$, que es una ecuación diferencial lineal que podemos convertir en diferencial exacta multiplicando por el factor integrante $\exp\left(\int \dfrac{-2}{x}dx\right) = x^{-2}$. Obtenemos de esta manera la ecuación diferencial exacta $\left(\dfrac{-2y}{x^3}+\dfrac{1}{x}\right)dx + \dfrac{1}{x^2}dy = 0$, cuya solución se calcula fácilmente, y es de la forma $y = x^2\log\left(\dfrac{c}{x}\right)$, donde c es una constante. La curva de esta familia que pasa por $(1,2)$ viene dada por la condición de que $2=\log c$, esto es, $c=\mathrm{e}^2$. Finalmente, la curva pedida viene dada por $y=x^2(2-\log x)$ donde $x>0$.