Temperatura. Teoría Cinética de los Gases

1. Un recipiente cerrado que posee un volumen de 10 ml contiene 1 ml de agua líquida en el fondo, y su temperatura es de 100ºC. La presión inicial es de 1 atm. Estímese la presión dentro del recipiente cuando el agua se ha evaporado por completo.

Supongamos que el vapor de agua se comporta como un gas ideal. La temperatura de este vapor será de 373 K. A medida que el agua líquida se evapora, el proceso ocurre a presión constante. Justo cuando toda el agua se ha evaporado, sólo tenemos vapor, a una presión dada por

$$P = \frac{NkT}{V}$$

donde k es la constante de Boltzmann. El número de partículas se puede relacionar con la masa de agua de agua (m), su peso molecular (M), y el número de Avogadro (N_A)

$$m = \frac{NM}{N_A} \quad \Rightarrow \quad N = m\frac{N_A}{M}.$$

Por otra parte, la masa inicial de agua

$$m = \rho V$$

es la que se convierte luego íntegramente en vapor. Usando estas ecuaciones y sustituyendo los valores numéricos

$$N = \rho V \frac{N_A}{M} = (1000\,\text{kg/m}^3)(10^{-6}\,\text{m}^3)\frac{6.023\times10^{23}\text{ moléculas/mol}}{0.018\,\text{kg/mol}} \approx 3.35\times10^{22},$$

donde se ha supuesto que la densidad del agua líquida a 100ºC es la misma que a 20ºC. Una vez determinado en número de moléculas de agua en el vapor, podemos calcular la presión final. El volumen de vapor será igual al volumen del recipiente

$$P = \frac{NkT}{V} = \frac{(3.35\times10^{22})(1.381\times10^{-23}\text{ J/K})(373\,\text{K})}{10\times10^{-6}\,\text{m}^3} = 172.4\times10^{22}\text{ Pa} = 171.5\,\text{atm}.$$

Como puede comprobarse, sólo con evaporar 1 ml de agua, es posible alcanzar una presión sumamente elevada.

2. Haciendo uso de las ecuaciones de la gravitación es posible demostrar que la velocidad de escape sobre la superficie de un planeta de radio R es $v_e = (2gR)^{1/2}$, donde g es la aceleración de la gravedad sobre la superficie del planeta. Se sabe

que si la velocidad promedio de las moléculas de un gas es del orden de 15 por ciento de la velocidad de escape del planeta, entonces total las moléculas del gas escaparán finalmente de dicho planeta.

(a) ¿A qué temperatura la velocidad media para el O_2 es igual al 15% de la velocidad de escape de la Tierra?

(b) ¿A qué temperatura la velocidad media para el H_2 es igual al 15% de la velocidad de escape de la Tierra?

(c) Las temperaturas en las zonas altas de la atmósfera alcanzan los 1000 K. ¿Cómo afecta esto a la poca abundancia de hidrógeno en la atmósfera terrestre?

(d) Calcule las temperaturas para las que la velocidad media de O_2 y H_2 son iguales al 15% de la velocidad de escape de la luna, donde *g* es un sexto de la gravedad terrestre, y *R* = 1738 km. ¿Cómo puede haber afectado esto a la ausencia de atmósfera en la Luna?

Podemos encontrar la temperatura de escape para la Tierra y la Luna igualando la velocidad media a 0.15 veces la velocidad de escape. Entonces, podemos comparar esas temperaturas para explicar la ausencia de gas en la zona alta de la atmósfera terrestre y en la superficie de la Luna.

(a) Empecemos por expresar la velocidad promedio de las moléculas de un gas

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} .$$

Siendo la constante de los gases, T la temperatura absoluta, y M el peso molecular. Igualando

$$0.15\sqrt{2gR_T} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} ,$$

donde R_T es el radio de la Tierra que es 6370 km. Despejando la temperatura de esta ecuación

$$T = \frac{0.045 g R_T M}{3R} .$$

Usando ahora el peso molecular del oxigeno

$$T = \frac{0.045(9.81\,\text{m/s}^2)(6.37\times 10^6\,\text{m})(0.032\,\text{kg/mol})}{3(8.314\,\text{J/mol·K})} \approx 3610\,\text{K} .$$

(b) Repitiendo el cálculo, pero esta vez para el hidrógeno molecular

$$T = \frac{0.045(9.81\,\text{m/s}^2)(6.37\times 10^6\,\text{m})(0.002\,\text{kg/mol})}{3(8.314\,\text{J/mol}\cdot\text{K})} \approx 225\,\text{K}\,.$$

(c) Si $v > 0.15v_e$ entonces las moléculas escapan, lo cual ocurre para el hidrógeno cuando $T > 225$ K. Puesto que en la parte alta de la atmósfera se encuentra a 1000 K, *el hidrógeno molecular escapará*, pero no el oxígeno molecular.

(d) Repitamos ahora el cálculo para la Luna:

$$T = \frac{0.045(g/6)R_L M}{3R} = \frac{0.0025 g R_L M}{R}\,.$$

Sustituyendo los valores numéricos para el oxígeno molecular

$$T = \frac{0.0025(9.81\,\text{m/s}^2)(1.738\times 10^6\,\text{m})(0.032\,\text{kg/mol})}{(8.314\,\text{J/mol}\cdot\text{K})} \approx 164\,\text{K}\,,$$

y para el hidrógeno molecular

$$T = \frac{0.0025(9.81\,\text{m/s}^2)(1.738\times 10^6\,\text{m})(0.002\,\text{kg/mol})}{(8.314\,\text{J/mol}\cdot\text{K})} \approx 10.3\,\text{K}\,.$$

Como la temperatura en la superficie de la Luna es del orden de 1000 K, tenemos que *los dos gases habrán escapado de la Luna desde su formación hasta el momento presente*.

3. La velocidad de escape en Marte es de 5 km/s y la temperatura de su superficie es típicamente de 0ºC. Calcule la velocidad promedio para (a) H_2, (b) O_2 y (c) CO_2 a esta temperatura. (d) Basándose en el criterio del problema anterior ¿será posible encontrar estos gases en la atmósfera de Marte?

En este problema debemos hacer uso de la ecuación

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}\,.$$

(a) Para el H_2

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(273\,\text{K})}{0.002\,\text{kg/mol}}} = 1.85\,\text{km/s}\,.$$

(b) Para el O_2

$$v_{O_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K})(273\,\mathrm{K})}{0.032\,\mathrm{kg/mol}}} = 461\,\mathrm{m/s}\,.$$

(c) Para el CO_2

$$v_{CO_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K})(273\,\mathrm{K})}{0.044\,\mathrm{kg/mol}}} = 393\,\mathrm{m/s}\,.$$

(d) El 15% de la velocidad de escape de Marte es $0.15\times 1000\,\mathrm{m/s} = 750\,\mathrm{m/s}$. Puesto que este valor supera las velocidades promedio del O_2 y del CO_2, estos gases deberían en un principio estar presentes en la atmósfera de Marte. Sin embargo, el H_2 no.

4. Repita el problema anterior para Júpiter, cuya velocidad de escape es 60 km/s y su temperatura superficial es de –150ºC.

Rehaciendo de nuevo todas las cuentas

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K})(123\,\mathrm{K})}{0.002\,\mathrm{kg/mol}}} = 1.24\,\mathrm{km/s}\,,$$

$$v_{O_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K})(123\,\mathrm{K})}{0.032\,\mathrm{kg/mol}}} = 310\,\mathrm{m/s}\,,$$

$$v_{CO_2} = \sqrt{\frac{3(8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K})(123\,\mathrm{K})}{0.044\,\mathrm{kg/mol}}} = 264\,\mathrm{m/s}\,.$$

El 15% de la velocidad de escape es 0.15×60 km/s = 9 km/s. Comparando, este valor supera a las velocidades promedio de todos estos gases, así que concluimos que *los tres deberían estar presentes en la atmósfera de Júpiter*.