Rotación

1. Una bicicleta de masa 14 kg posee unas ruedas con un diámetro de 1.2 m, cada una de ellas de 3 kg de masa. La masa del ciclista es de 38 kg. Estímese la fracción de la energía cinética total de la bicicleta y el ciclista asociada con la rotación de las ruedas.

Para hacer este ejercicio, simplificaremos las cosas y supondremos que las ruedas se pueden modelar como dos aros delgados (despreciamos los radios y el grosor de las ruedas). Sea M la masa del ciclista, m la de la bicicleta sin incluir las ruedas, m_r la masa de cada rueda, y r el radio de las ruedas. La fracción que se pide en el problema es el siguiente cociente de energías cinéticas:

$$\frac{K_{rot}}{K_{tot}} = \frac{K_{rot}}{K_{rot} + K_{trans}}, \tag{1.1}$$

siendo K_{rot} la energía cinética de rotación de las ruedas. Teniendo en cuenta que hay dos ruedas en la bicicleta, y que la rueda es un aro de radio r, esta energía es

$$K_{rot} = 2K_{rot,rueda} = 2\frac{1}{2}I_r\omega^2 = I_r\omega^2 = m_r r^2\omega^2 = m_r r^2\frac{v^2}{r^2} = m_r v^2, \tag{1.2}$$

donde se ha usado que el momento de inercia de la rueda en torno al eje que pasa por el centro de masas es $I_r = m_r r^2$. Por otro lado, K_{trans} es la energía cinética de translación del conjunto, e incluye la de la bicicleta, el ciclista y la de las dos ruedas (nótese que al rodar, el centro de masas de las ruedas también se traslada)

$$K_{trans} = K_{trans,bicicleta} + K_{trans,ciclista} + K_{ruedas} = \frac{1}{2}(m + M + 2m_r)v^2. \tag{23.3}$$

Reemplazando las ecuaciones 1.2 y 1.3 en la ecuación 1.1, obtenemos

$$\frac{K_{rot}}{K_{tot}} = \frac{m_r v^2}{m_r v^2 + \frac{1}{2}(m + M + 2m_r)v^2} = \frac{2m_r}{4m_r + m + M} = \frac{2\cdot 3\,\text{kg}}{4\cdot 3\,\text{kg} + 8\,\text{kg} + 38\,\text{kg}} = 0.103.$$

Es decir, un 10.3% de la energía cinética corresponde a rotación; el resto es traslación. Curiosamente, el resultado es independiente del radio de las ruedas y de la velocidad de la bicicleta.

2. ¿Por qué siempre que cae una tostada de la mesa lo hace por la parte untada? Aunque esta cuestión pueda parecer absurda, en realidad en su respuesta hay implicados conceptos físicos serios. El análisis de esta pregunta es demasiado

complicado para reproducirlo aquí, pero R.D. Edge y D. Steinert demostraron que una tostada que es empujada lentamente hacia el borde de una mesa hasta caerse, típicamente abandona la mesa cuando el ángulo que forma respecto a la horizontal es de 30º, y en ese instante posee una velocidad angular de $\omega_0 = 0.956(g/l)^{1/2}$, siendo l la longitud de uno de los lados de la tostada (suponiendo que es cuadrada). Asumiendo que la tostada empieza a caer con la cara untada orientada hacia arriba, ¿con que cara tocará el suelo si la altura del la mesa es de 0.5 m? ¿Y si la altura es de 1 m? Para resolver esta cuestión suponga que la tostada mide $l = 0.1$ m, y aterrizará cara abajo cuando el ángulo esté entre 180º y 270º, y que las fuerzas de rozamiento con el aire son despreciables.

Vamos en primer lugar a determinar el tiempo que tarda la tostada en llegar al suelo. Para este cálculo no necesitamos considerar la rotación si suponemos que esto ocurre cuando el centro de la tostada toca el suelo (en el cálculo del tiempo de caída despreciamos el hecho de que la tostada puede llegar en el suelo chocando por uno de sus bordes). Se trata de una caída libre por acción de la aceleración de la gravedad, dirigida en la dirección negativa del eje y (el eje vertical)

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.1}$$

En el tiempo inicial partimos de $y_0 = h$ (altura de la mesa) con una velocidad inicial nula $v_{0y} = 0$. Cuando llega al suelo, $y = 0$. Llamando t_f al tiempo final de llegada, la ecuación 2.1 queda

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_f^{\,2} \qquad \Rightarrow \qquad t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{2.2}$$

Durante el proceso de caída, la única fuerza que hay aplicada sobre la tostada es la gravedad, actuando sobre su centro de masas. Esta fuerza no es capaz de generar ningún momento de rotación, y por tanto la tostada girará a una velocidad angular constante, e igual a la velocidad angular inicial $\omega_0 = 0.956(g/l)^{1/2}$. Por tanto, el ángulo respecto a la horizontal en un instante t cualquiera será

$$\theta = \theta_0 + \omega t = \theta_0 + \omega_0 t = \theta_0 + 0.956\left(g/l\right)^{1/2} t.$$

Tomando ahora el tiempo final de llegada, usando la ecuación 2.2, y recordando que en el enunciado del problema se indica que $\theta_0 = 30º = \pi/6$, obtenemos

$$\theta_f = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{g}{l}}t_f = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{2h}{l}}.$$

Reemplacemos ahora los valores numéricos. Si la altura de la mesa es de $h = 0.5$ m

$$\theta_f = \frac{\pi}{6} + 0.956\sqrt{\frac{2\cdot(0.5\text{ m})}{0.1\text{ m}}} = 3.547\text{ rad} = 203.2^{\circ}$$

Y por tanto, la tostada *cae boca abajo*. Si repetimos los cálculos para una mesa con una altura de $h = 1$ m, se obtiene 274.9º, es decir, *boca arriba*.

3. Considere el momento de inercia de un varón adulto promedio, respecto al eje vertical que pasa por el centro de su cuerpo cuando éste se encuentra erguido cuando tiene los brazos extendidos perpendicularmente y cuando están pegados están pegados al cuerpo. Estime el valor de la razón entre ambos momentos de inercia.

Debemos hacer algunas aproximaciones sobre las características del cuerpo humano. De entrada, supondremos que su peso es de $M = 80$ kg, y que cuando se encuentra erguido con los brazos pegados a los lados, podemos modelarlo como un cilindro homogéneo. Aproximadamente, la cintura es una circunferencia de radio 14 cm, mientras que en el pecho el radio es más o menos igual a 17 cm. Tomaremos un valor promedio, dado por la media aritmética de estos dos valores, y este será el radio del cilindro

$$R = \frac{14\,\text{cm} + 17\,\text{cm}}{2} = 15.5\,\text{cm}\,.$$

Además, supondremos que el 20% de la masa corporal pertenece a los dos brazos, Por tanto, cada brazo pesa $m = 8$ kg. Además, supondremos que cada uno de ellos mide una longitud de $L = 1$ m.

Lo que nos pide el problema es el cociente de los momentos de inercia cuando los brazos están abiertos en cruz y pegados,

$$\frac{I_{abiertos}}{I_{pegados}}\,.$$

Cuando están pegados, el cuerpo es como un cilindro de radio R y masa total del cuerpo, M:

$$I_{pegados} = \frac{1}{2}MR^2\,.$$

Cuando están colocados en cruz, es necesario separar las contribuciones de los brazos y el resto del cuerpo:

$$I_{abiertos} = I_{cuerpo} + 2I_{brazo}\,.$$

Por un lado, el momento de inercia del resto del cuerpo es (usando de nuevo como modelo al cilindro)

$$I_{cuerpo} = \frac{1}{2}(M - 2m)R^2 .$$

Para un brazo, vamos a considerar que el momento de inercia se puede aproximar por una varilla que gira alrededor de un eje perpendicular colocado en una de sus puntas (y que a su vez, es el eje que pasa por el centro del cuerpo)

$$I_{brazo} = \frac{1}{3}mL^2 .$$

Uniendo todos estos resultados y reemplazando las cantidades numéricas, llegamos a que

$$\frac{I_{abiertos}}{I_{pegados}} = \frac{\frac{1}{2}(M-2m)R^2 + \frac{2}{3}mL^2}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{\frac{1}{2}(80\,\mathrm{kg} - 16\,\mathrm{kg})(15.5\,\mathrm{cm})^2 + \frac{2}{3}(8\,\mathrm{kg})(100\,\mathrm{cm})^2}{\frac{1}{2}(80\,\mathrm{kg})(15.5\,\mathrm{cm})^2} = 6.35$$

Es decir, abrir los brazos en cruz aumenta aproximadamente el momento de inercia de una persona en un factor 6. Este efecto lo aprovechan los patinadores para aumentar la velocidad angular de giro cuando cierran los brazos, y se puede comprobar fácilmente usando un taburete giratorio y abriendo y cerrando los brazos.