Ecuaciones de Máxwell y ondas electromagnéticas

1. Estímese la intensidad y la potencia total de un láser necesario para elevar una pequeña esfera de plástico de 15 μm de diámetro contra la fuerza de la gravedad. Háganse todas las suposiciones que se consideren razonables.
Supóngase que el plástico tiene aproximadamente la misma densidad que el agua.

Para que la esfera esté en equilibrio, la fuerza ejercida por el láser tiene que ser igual al peso. La fuerza que ejerce el láser F_l sobre un área A está relacionada con la presión de radiación P_r según la expresión:

$$F_l = P_r A = \frac{1}{4} P_r \pi d^2 = mg$$

donde se ha tenido en cuenta que el láser realiza fuerza a través del área inferior de la esfera, que es igual al área de un círculo de diámetro d, y la condición de equilibrio dinámico.

La presión de radiación es el cociente entre la intensidad del haz y la velocidad de la luz, por lo que:

$$P_r = \frac{I}{c}$$

Sustituyendo se tiene:

$$\frac{1}{4}\frac{I}{c}\pi d^2 = mg \;\Rightarrow\; I = \frac{4mgc}{\pi d^2}$$

La masa de la esfera será su volumen por su densidad:

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho \frac{1}{6}\pi d^3$$

Sustituyendo se obtiene la expresión para la intensidad I:

$$I = \frac{4mgc}{\pi d^2} = \frac{4\rho \frac{1}{6}\pi d^3 gc}{\pi d^2} = \frac{2}{3}\rho dgc$$

Sustituyendo valores tiene:

$$I = \frac{2}{3}\left(103\ \text{kg/m}^3\right)(15\ \mu\text{m})\left(9{,}81\ \text{m/s}^2\right)\left(3\times 10^8\ \text{m/s}\right) = \boxed{2{,}94\times 10^7\ \text{W/m}^2}$$

Una vez conocida la intensidad, la potencia P se obtiene multiplicando ésta por el área:

$$P = I\frac{1}{4}\pi d^2$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$P = \frac{1}{4}\pi\,(15\ \mu\text{m})^2\left(2{,}94\times 10\ \text{W/m}^2\right) = \boxed{5{,}20\ \text{mW}}$$

2. Algunos escritores de ciencia ficción han utilizado velas solares para propulsar naves interestelares. Imagínese una vela gigantesca colocada sobre una nave interestelar sujeta a la presión de radiación. (a) Muéstrese que la aceleración vienen dada por

$$\boldsymbol{a = \frac{P_s A}{4\pi r^2 mc}}$$

donde A es el área de la vela, r la distancia al sol, m la masa total de la nave, c la velocidad de la luz y P_s es la potencia total emitida por el Sol, y que toma un valor $3{,}8 \times 10^{26}$ W. (b) Muéstrese que la velocidad de la nave a una distancia r del Sol sigue una expresión:

$$\boldsymbol{v^2 = v_0^2 + \left(\frac{P_s A}{2\pi mc}\right)\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la nave a una distancia r_0. (c) Compárese las aceleraciones relativas debidas a la presión de radiación y a la fuerza gravitacional. Úsese valores razonables para A y m. ¿Funcionaría un sistema similar?

(a) Para calcular la aceleración hay que tener en cuenta que sobre la nave actuarán la fuerza debida a la radiación F_r y la fuerza de la gravedad ejercida por el Sol F_g. De esta forma, la aceleración queda:

$$a = \frac{F_r - F_g}{m}$$

La fuerza que sobre la nave debida a la presión de radiación P_r es:

$$F_r = P_r A$$

donde dicha presión se puede obtener como la intensidad de la radiación dividida por la velocidad de la luz $P_r = \frac{I}{c}$. Sustituyendo esta expresión se obtiene la fuerza debida a la radiación:

$$F_r = \frac{IA}{c}$$

La intensidad a una determina distancia r es igual a la potencia total emitida P_s dividida por el área del frente de onda, es decir, $I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$, con lo que la fuerza debida a la radiación queda:

$$F_r = \frac{\frac{P_s}{4\pi r^2} A}{c} = \frac{P_s A}{4\pi r^2 c}$$

Por otra parte, la fuerza de la gravedad del Sol es:

$$F_g = G\frac{M_s m}{r^2}$$

Sustituyendo la expresión de las dos fuerzas en la de la aceleración, se tiene:

$$a = \frac{\frac{P_s A}{4\pi r^2 c} - G\frac{M_s m}{r^2}}{m} = \frac{\frac{P_s A}{4\pi c} - GM_s m}{mr^2}$$

Para áreas muy grandes, la componente de la gravedad en la aceleración se puede despreciar, con lo que queda una aceleración:

$$\boxed{a = \frac{P_s A}{4\pi c m r^2}}$$

(b) En el anterior apartado se ha obtenido la aceleración en función de la distancia al sol, con lo que se puede obtener la velocidad en función de la distancia al sol:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{P_s A}{4\pi c m r^2} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt}\frac{v}{v} = \frac{dv}{dt}\frac{v}{\frac{dr}{dt}} = \frac{dv}{dr}v = \frac{P_s A}{4\pi c m r^2} \;\Rightarrow\; v dv = \frac{P_s A dr}{4\pi c m r^2}$$

Integrando la anterior igualdad entre un punto inicial y un punto genérico se tiene:

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{r_0}^{r} \frac{P_s A dr}{4\pi c m r^2} \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{P_s A}{4\pi c m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \;\Rightarrow\; v^2 = v_0^2 = \frac{P_s A}{2\pi c m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

(c) El cociente entre las aceleraciones se puede obtener a partir de a fórmula anterior conseguida para la aceleración, previamente a despreciar la componente gravitatoria:

$$\frac{a_g}{a_r} = \frac{GM_s m}{\frac{P_s A}{4\pi c}} = \frac{4\pi c G M_s m}{P_s A} = \frac{4\pi\,(3\times 10^8\ \text{m/s})\left(6{,}7\times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2\right)\left(2{,}0\times 10^{30}\ \text{kg}\right)}{3{,}8\times 10^{26}\ \text{W}}\frac{m}{A}$$

En función de A y m, el cociente queda:

$$\frac{a_g}{a_r} = \left(1{,}3\times 10^3\ \text{m}^2/\text{kg}\right)\frac{m}{A}$$

Para que la aceleración debida a la fuerza gravitatoria se pueda despreciar, hace falta que la relación entre la masa de la nave y el área de la vela sea bastante menor de 10^{-3} kg/m^2. Esto implica que la nave tiene que se extremadamente pequeña y las velas extremadamente grandes para ese peso, lo que hace que un sistema de este tipo sea muy difícil de construir.

3. La intensidad de luz solar que incide sobre la parte superior de la atmósfera (llamada constante solar) es de 1,37 kW/m^2. (a) Encuéntrese el E_{rms} y el B_{rms} debido al Sol en la parte superior de la atmósfera. (b) Encuéntrese la potencia media que emite el Sol. (c) Encuéntrese la intensidad y la potencia de radiación en la superficie del Sol.

(a) La intensidad se relaciona con E_{rms} y B_{rms} mediante la expresión:

$$I = \frac{E_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{\mu_0}$$

mientras que se cumple que $E_{\text{rms}} = cB_{\text{rms}}$, por lo que la intensidad se puede expresar en función únicamente de E_{rms} como:

$$I = \frac{E_{\text{rms}}^2}{c\mu_0} \;\Rightarrow\; E_{\text{rms}} = \sqrt{c\mu_0 I}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{(3\times 10^8\ \text{m/s})\left(4\pi\times 10^{-7}\ \text{N/A}^2\right)\left(1{,}37\ \text{kW/m}^2\right)} = \boxed{719\ \text{V/m}}$$

Y el campo magnético queda:

$$B_{\text{rms}} = E_{\text{rms}}/c = \frac{719\ \text{V/m}}{3\times 10^8\ \text{m/s}} = \boxed{2{,}40\ \mu\text{T}}$$

(b) La potencia media P_m en términos de la constante solar resulta ser:

$$P_m = 4\pi R^2 I$$

donde R es la distancia tierra sol. Por tanto:

$$P_m = 4\pi \left(1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}\right)^2 \left(1{,}37\ \mathrm{kW/m^2}\right) = \boxed{3{,}87 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}$$

(c) La intensidad en la superficie del Sol I_s, en términos de la potencia media que emite el Sol y su radio R_s resulta ser:

$$I_s = \frac{P_m}{4\pi R_s^2} = \frac{3{,}87 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi \left(6{,}96 \times 10^{8}\ \mathrm{m}\right)^2} = \boxed{6{,}36 \times 10^{7}\ \mathrm{W/m^2}}$$

Por último, la presión de radiación en la superficie del Sol P_s se obtiene como:

$$P_s = \frac{I_s}{c} = \frac{6{,}36 \times 10^{7}\ \mathrm{W/m^2}}{3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = \boxed{0{,}212\ \mathrm{Pa}}$$

4. Estímese la fuerza que la presión de radiación del Sol ejercida sobre la Tierra, y compárese con la fuerza de atracción gravitatoria del Sol. La intensidad de la luz solar en la órbita terrestre es de 1,37 kW/m^2

Si se conoce la presión de radiación, la fuerza ejercida se obtiene multiplicando por el área donde se ejerce. La presión de radiación se obtiene a partir de la intensidad como:

$$P_r = \frac{I}{c}$$

Por lo que la fuerza que ejerce la presión de la radiación sobre la tierra será:

$$F_r = P_r A = \frac{I \pi R_T^2}{c}$$

donde R_T es el radio de la Tierra. Sustituyendo valores se tiene:

$$F_r = \frac{\pi \left(1{,}37\ \mathrm{kW/m^2}\right) \left(6370\ \mathrm{km}\right)^2}{3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = \boxed{5{,}82 \times 10^{8}\ \mathrm{N}}$$

La fuerza gravitatoria es:

$$F_g = \frac{G M_S M_T}{R_{TS}^2}$$

donde R_{TS} es la distancia de la Tierra al Sol. Sustituyendo valores:

$$F_g = \frac{\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\right) \left(1{,}99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}\right) \left(5{,}98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{\left(1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}\right)^2} = 3{,}53 \times 10^{22}\ \mathrm{N}$$

El cociente entre las dos fuerzas queda:

$$\frac{F_r}{F_g} = \frac{5{,}82 \times 10^{8}\ \mathrm{N}}{3{,}53 \times 10^{22}\ \mathrm{N}} = 1{,}65 \times 10^{-14}$$

La fuerza gravitatoria es catorce órdenes de magnitud superior a la fuerza de la presión de radiación.

5. Repítase el problema 4 para el planeta Marte. ¿En qué planeta es mayor la relación entre la fuerza de la presión de radiación y la fuerza gravitatoria? ¿Por qué?

Si se conoce la presión de radiación, la fuerza ejercida se obtiene multiplicando por el área donde se ejerce. La presión de radiación se obtiene a partir de la intensidad de la radiación solar sobre Marte como:

$$P_r = \frac{I_M}{c}$$

Por lo que la fuerza que ejerce la presión de la radiación sobre Marte será:

$$F_r = P_r A_M = \frac{I_M \pi R_M^2}{c}$$

donde R_M es el radio de Marte.

La intensidad de la radiación solar sobre Marte se puede obtener a partir de la intensidad sobre la Tierra I_T y de los radios de las órbitas de Marte y la Tierra, r_M y r_T, como:

$$\frac{I_M}{I_T} = \left(\frac{r_T}{r_M}\right)^2 \Rightarrow I_M = I_T \left(\frac{r_T}{r_M}\right)^2$$

Teniendo esto en cuenta, la fuerza ejercida por la presión de radiación queda:

$$F_r = \frac{I_T \pi R_M^2}{c} \left(\frac{r_T}{r_M}\right)^2$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$F_r = \frac{\pi \left(1{,}37 \text{ kW/m}^2\right) (3395 \text{ km})^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \left(\frac{(1{,}50 \times 10^{11} \text{ m})\, r_T}{(2{,}29 \times 10^{11} \text{ m})}\right)^2 = \boxed{7{,}09 \times 10^7 \text{ N}}$$

La fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre Martes es:

$$F_g = \frac{G M_S M_M}{R_{MS}^2} = \frac{G M_S (0{,}11 M_T)}{R_{MS}^2}$$

donde R_{MS} es la distancia de Marte al Sol y M_M la masa del planeta, y donde se ha utilizado que la masa de Marte es 0,11 la masa de la Tierra M_T. Sustituyendo valores:

$$F_g = \frac{\left(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2\right) (1{,}99 \times 10^{30} \text{ kg})\, (0{,}11)\, (5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(2{,}29 \times 10^{11} \text{ m})^2} = 1{,}66 \times 10^{21} \text{ N}$$

El cociente entre las dos fuerzas queda:

$$\frac{F_r}{F_g} = \frac{7{,}09 \times 10^7 \text{ N}}{1{,}66 \times 10^{21} \text{ N}} = 4{,}27 \times 10^{-14}$$

El cociente entre fuerza de radiación y gravitatoria es mayor para Marte que para la Tierra. Esto se debe a que el cociente no depende de la distancia del planeta al Sol, ya que ambas fuerzas depende de esta distancia como r^{-2}, mientras que sí existe dependencia con el radio del planeta R. En concreto, la fuerza de radiación depende como R^2, mientras que la fuerza gravitatoria como R^3. Si se supone una densidad similar para la Tierra y Marte, el cociente depende como $R^2/R^3 = R^{-1}$, por lo que será mayor para Marte al tener menor radio.

6. En el nuevo campo del enfriamiento por láser, las fuerzas asociadas a la presión de radiación son usadas para frenar velocidades térmicas de átomos desde cientos de metros por segundo, en temperaturas ambiente, a pocos metros por segundo o incluso más lento. Un átomo aislado absorberá radiación sólo a unas frecuencias específicas de radiación, llamadas frecuencias de resonancia. Si la frecuencia del haz láser es la misma que la frecuencia de resonancia del átomo, entonces la radiación se absorbe mediante un proceso llamado absorción resonante. La sección eficaz efectiva del átomo resonante (la superficie que el átomo presenta a la la radiación) es aproximadamente igual a $\boldsymbol{\lambda^2}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la longitud de onda del haz láser. (*a*) Estimar la aceleración de un átomo de rubidio (masa atómica de 85 g/mol) en un haz láser cuya longitud de onda sea de 780ñm y su intensidad 10 W/m^2. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará un haz de este tipo para frenar un átomo de rubidio de un gas a temperatura ambiente (300 K) hasta una velocidad cercana a cero?

(*a*) Se puede utilizar la segunda ley de Newton para obtener la aceleración a partir de la fuerza ejercida por la presión de radiación del haz láser, que es igual a la presión de radiación por la sección eficaz efectiva del átomo A. La presión de radiación se puede obtener como la intensidad del haz partido por la velocidad de la luz, con lo que la fuerza que ejerce la radiación queda:

$$F_r = P_r A = \frac{IA}{c} = \frac{I\lambda^2}{c}$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$ma = \frac{I\lambda^2}{c} \;\Rightarrow\; a = \frac{I\lambda^2}{mc}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$a = \frac{\left(10\ \mathrm{W/m^2}\right)(780\ \mathrm{nm})^2}{\left(85\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \times \frac{1\ \mathrm{mol}}{6{,}02\times10^{23}\ \text{partículas}}\right)(3\times10^8\ \mathrm{m/s})} = \boxed{1{,}44\times10^5\ \mathrm{m/s^2}}$$

(*b*) Para estimar el tiempo necesario, se utiliza la relación entre la aceleración y la variación de velocidad, con lo que se tiene:

$$\Delta t = \frac{v_f - v_0}{a}$$

Como se supone que la velocidad final es aproximadamente nula, se tiene que el tiempo empleado es aproximadamente:

$$\Delta t = -\frac{v_0}{a}$$

Consindérese la velocidad inicial como la velocidad cuadrática media v_{rms} de los átomos de un gas a una determinada temperatura, que resulta ser:

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Sustituyendo en la expresión del tiempo se tiene:

$$\Delta t = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Se sustituyen valores y se tiene:

$$\Delta t = -\frac{1}{-1{,}44 \times 10^{5}\ \mathrm{m/s}^{2}} \sqrt{\frac{3\,(1{,}38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})\,(300\ \mathrm{K})}{\left(85\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \times \frac{1\ \mathrm{mol}}{6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{partículas}}\right)}} = \boxed{2{,}06\ \mathrm{ms}}$$