XIV ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA. Granada, 2 y 3 de noviembre de 2007

Trabajo subvencionado por MTM2007-66262 y EHU06/05

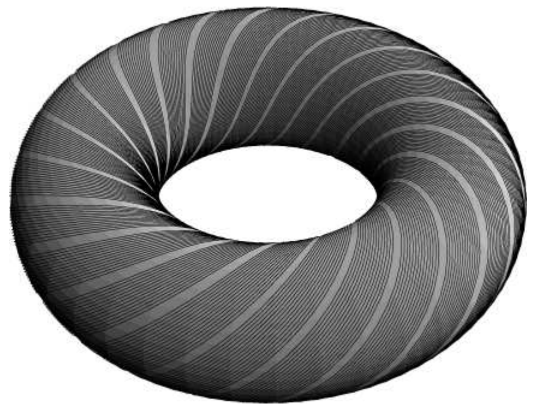
Hojas Minimales en Foliaciones Singulares

José Ignacio Royo Prieto
UPV-EHU (Bilbao)

Martín Saralegi Aranguren
Université d'Artois (Francia)

Robert Wolak
Uniwersytet Jagiellonski (Polonia)

Escenario y Actores



- Una **foliación** $\mathscr{F}$ es una partición de una variedad diferenciable M en subvariedades conexas (**hojas**) de la misma dimensión. Si existe una métrica en M tal que la distancia entre las hojas es localmente constante, diremos que la foliación es **riemanniana**.
- Se dice que una foliación es **taut** si existe una métrica en M para la cual todas las hojas de $\mathscr{F}$ son subvariedades minimales de M. Intuitivamente, eso significa que el volumen de las hojas es localmente constante.
- El invariante cohomológico adecuado para estudiar el espacio cociente $M/\mathscr{F}$ es la **cohomología básica** $H^*(M/\mathscr{F})$, es decir, la del siguiente complejo de formas diferenciales:
  $\Omega^*(M/\mathscr{F}) = \{\omega \in \Omega^*(M) : \ i_X\omega = i_X d\omega = 0 \quad \forall X \text{ tangente a } \mathscr{F}\}$
- Dada una métrica μ, tenemos la **forma de curvatura media** κ_μ asociada a μ (intuitivamente, mide la variación del volumen local de las hojas en la dirección transversa a las mismas).

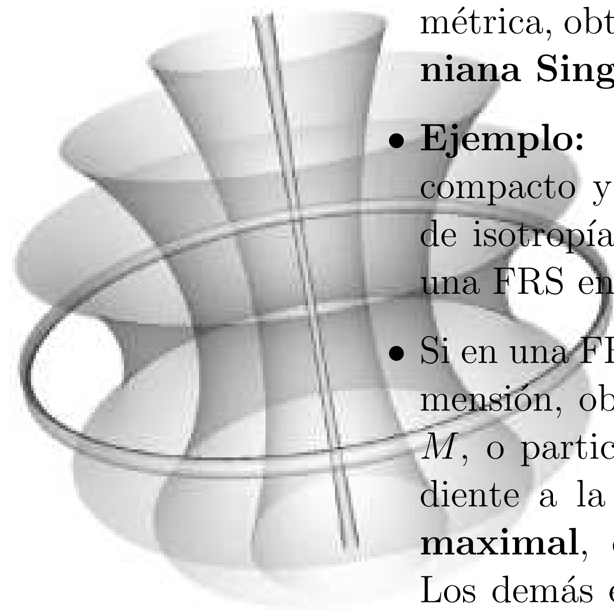
Caracterización Cohomológica (caso regular compacto)

Sea $\mathscr{F}$ una foliación riemanniana sobre la variedad compacta y sin borde M. Entonces, κ_μ puede suponerse básica (**Domínguez**) y cerrada (**Kamber-Tondeur**). Es más, define la **clase de minimalidad** $\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_\mu] \in H^1(M/\mathscr{F})$, que no depende de μ, sino sólo de $\mathscr{F}$ (**Álvarez**). Además, son equivalentes:

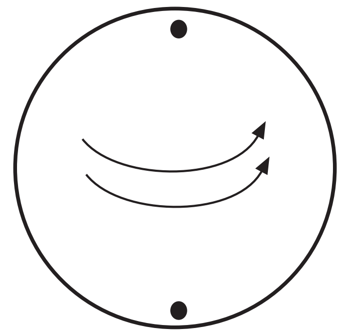
- $\mathscr{F}$ es taut;
- (**Masa**) $H^q(M/\mathscr{F}) = \mathbb{R}$, siendo q la codimensión de $\mathscr{F}$.
- (**Álvarez**) La clase $\boldsymbol{\kappa} \in H^1(M/\mathscr{F})$ es nula.

Objetivo: reproducir esta caracterización para Foliaciones riemannianas **singulares**.

Nuevo escenario: Foliaciones Riemannianas Singulares



- Si permitimos que las hojas tengan dimensiones distintas y mantenemos la condición métrica, obtenemos una **Foliación Riemanniana Singular (FRS)**.
- **Ejemplo:** Una acción de un grupo de Lie compacto y conexo sobre M con subgrupos de isotropía de distintas dimensiones induce una FRS en M. Cada órbita es una hoja.
- Si en una FRS agrupamos las hojas por su dimensión, obtenemos una **estratificación** de M, o partición por **estratos**. El correspondiente a la mayor dimensión es el **estrato maximal**, que es un abierto denso de M. Los demás estratos son **singulares**. La restricción de $\mathscr{F}$ a cada estrato es una foliación riemanniana (regular).
- **Ejemplo:** Podemos definir una FRS en $\mathbb{S}^2$ según las órbitas de una rotación, como en la figura. El estrato maximal está foliado por círculos, y cada uno de los puntos fijos es un estrato singular. No existe ninguna métrica en $\mathbb{S}^2$ que haga que todas las hojas sean subvariedades minimales. Intuitivamente, el volumen de las hojas no puede ser localmente constante, pues colapsan en los puntos singulares. No obstante, la parte regular por separado (un cilindro foliado por círculos), sí que admite una métrica minimizante.



- De hecho, dada una FRS cualquiera, no existe ninguna métrica **global** sobre la variedad que haga que todas las hojas sean subvariedades minimales (**Miquel-Wolak**).

Conclusión: la propia naturaleza singular de las FRS nos invita a abordar la minimalidad geométrica no globalmente, sino en cada estrato.

Nuestros resultados: Foliaciones Riemannianas Singulares taut

Sea $\mathscr{F}$ una Foliación Riemanniana Singular sobre la variedad cerrada M. Nuestro estudio se puede resumir en los dos teoremas siguientes:

Teorema: (RSW) Sea S un estrato de la FRS $(M, \mathscr{F})$. Entonces, el estudio y la caracterización cohomológica del caso regular compacto es válido para la Foliación Riemanniana $(S, \mathscr{F})$, es decir, existe una clase de minimalidad $\boldsymbol{\kappa}_S \in H^1(S/\mathscr{F})$ cuya nulidad equivale a que $(S, \mathscr{F})$ sea taut y equivale a que $H_c^{cod_S \mathscr{F}}(S/\mathscr{F}) = \mathbb{R}$.

Idea de la prueba: (*Notar que S es, en general, una variedad no compacta*). Mediante la **desingularización de Molino** de $(M, \mathscr{F})$ podemos embeber cada estrato $(S, \mathscr{F})$ como un abierto saturado de una foliación riemanniana sobre una variedad compacta, y utilizar ahí los resultados ya conocidos.

Teorema: (RSW) Sea $\mathscr{F}$ una Foliación Riemanniana Singular sobre la variedad cerrada M. Entonces existe una clase de cohomología básica $\boldsymbol{\kappa} \in H^1(M/\mathscr{F})$ que induce la clase de minimalidad $\boldsymbol{\kappa}_S$ en cada estrato $(S, \mathscr{F})$.

Conclusiones finales

- Dada una FRS $\mathscr{F}$ sobre la variedad cerrada M, cabe preguntarse por su carácter taut o minimalidad cohomológicamente hablando (i.e. existe una clase de minimalidad $\boldsymbol{\kappa} \in H^1(M/\mathscr{F})$).
- La interpretación geométrica (minimalidad de las hojas) de la minimalidad cohomológica de $(M, \mathscr{F})$ no puede hacerse globalmente, sino individualmente en cada estrato: $\boldsymbol{\kappa} = 0 \in H^1(M/\mathscr{F})$ si y sólo si cada $(S, \mathscr{F})$ es taut.

Corolario: (RSW) Toda FRS sobre una variedad cerrada y simplemente conexa es taut en el sentido anterior.

Nota: La desingularización de Molino no conserva la simple conexión, pero sí que conserva el carácter taut.