Un ejemplo de laminación promediable con crecimiento exponencial*

María Pérez Fernández de Córdoba
Universidad de Santiago de Compostela

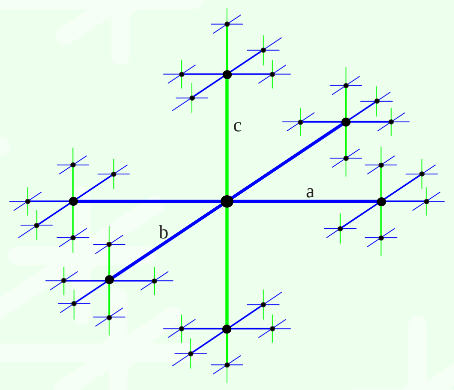
XIV Encuentro de Topología
Granada 2007

1 OBJETIVO

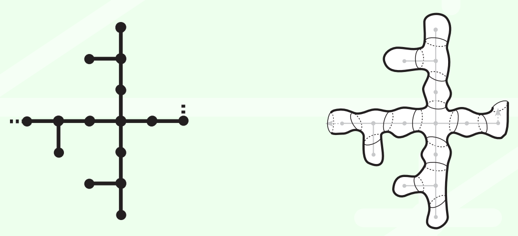
El objetivo de nuestro trabajo es mostrar un ejemplo de laminación promediable con crecimiento exponencial. Ejemplos similares han sido construidos por Roussarie, Thurston [7], Ghys y Sergiescu [5], aunque todos ellos se definen mediante acciones del grupo afín. **En nuestro caso, se trata de una laminación sin holonomía, cuya promediabilidad se deduce del hecho de que el número de ramificación de su pseudogrupo de holonomía [1] es igual a** 1.

2 TOPOLOGÍA DE GROMOV-HAUSDORFF

Sea $\mathcal{G}_3$ el grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores a, b y c, y $\mathcal{T}$ el conjunto de los subárboles infinitos de $\mathcal{G}_3$ que contienen al origen. Dotamos a $\mathcal{T}$ de la *métrica de Gromov-Hausdorff*, donde dos árboles están próximos si coinciden en una gran bola centrada en el origen. El espacio métrico $\mathcal{T}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.



Sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia definida sobre $\mathcal{T}$ que identifica dos árboles T y T' si $T = v^{-1}T'$ para algún $v \in \mathcal{G}_3$. Cada clase de equivalencia $\mathscr{R}[T]$ es el conjunto de vértices de un grafo $\mathcal{O}_T$ isomorfo al cociente del árbol T por el grupo de traslaciones que lo dejan invariante. Según [2] y [4], $\mathcal{T}$ puede verse como una transversal completa de una laminación compacta por superficies de Riemann.



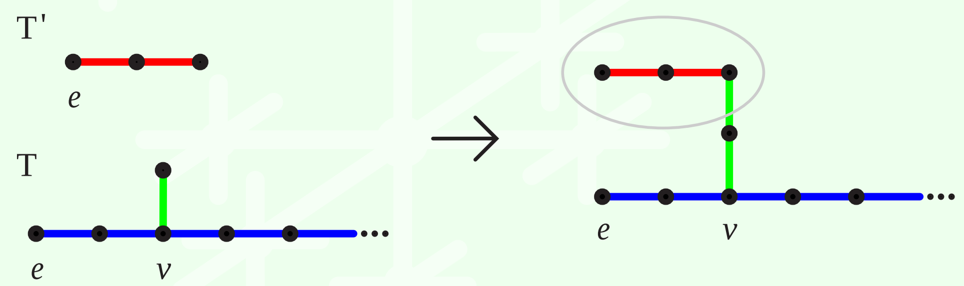
Un árbol $T \in \mathcal{T}$ se dice *repetitivo* si toda bola centrada en el origen puede ser embebida dentro de una bola de radio uniforme centrada en cualquier vértice de T. Cuando T es repetitivo, la clausura de $\mathscr{R}[T]$ es un conjunto $\mathscr{R}$-saturado minimal, transversal completa de una laminación minimal. Si T es *aperiódico* (i.e. no coincide con ninguno de sus trasladados), la laminación no tiene holonomía.

La construcción de nuestro ejemplo se reduce a la construcción de dos subárboles repetitivos y aperiódicos de $\mathcal{G}_3$, con idéntica clausura, mediante un proceso de injerto sucesivo [3] de determinado tipo de árboles finitos.

3 INJERTOS

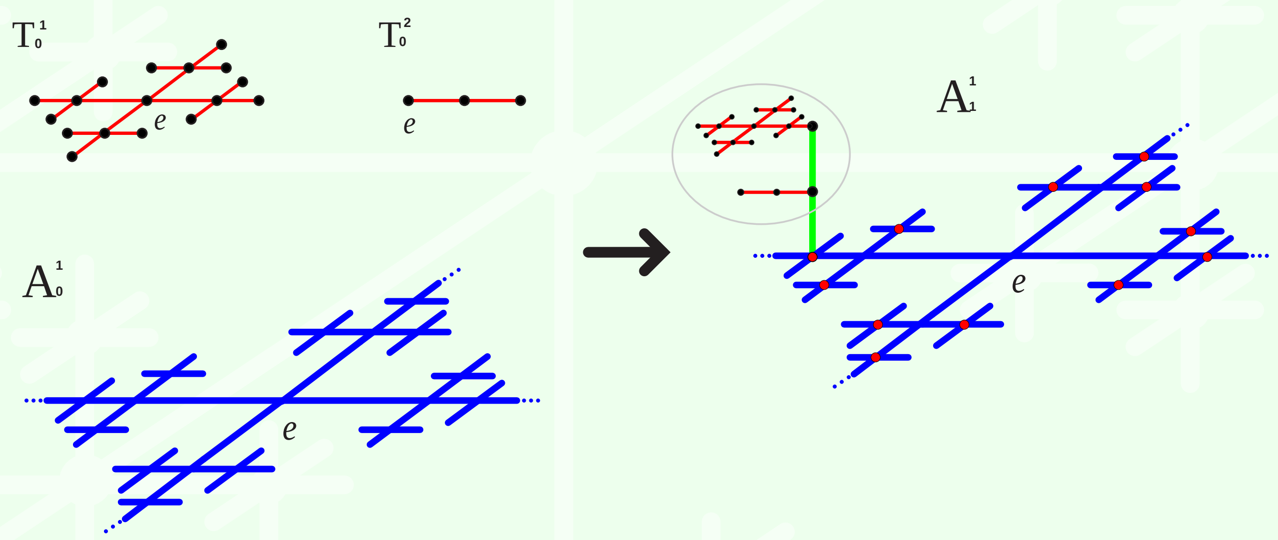
El grafo de Cayley $\mathcal{G}_2$ del grupo libre con dos generadores a y b es un subárbol de $\mathcal{G}_3$. Dado un árbol $T \in \mathcal{T}$, cada vértice de T está unido por un único camino geodésico a un único punto de $T \cap \mathcal{G}_2$. Llamaremos *rama vertical* de T sobre un vértice $v \in T \cap \mathcal{G}_2$ a la unión de los caminos con punto final v. La *saturación vertical* de cualquier subárbol T' de T es la unión de las ramas verticales de T que cortan a T'.

Sea v un vértice de $T \cap \mathcal{G}_2$ y supongamos que T contiene un segmento vertical maximal que une v con vc^p. Sea $T' \in \mathcal{T}$ un subárbol de $\mathcal{G}_3$ que contiene un segmento horizontal que une e con a^q. Podemos injertar T' sobre v añadiendo la arista de origen vc^p y extremo vc^{p+1} y la imagen de T' mediante la traslación por $vc^{p+1}a^{-q}$.



4 CONSTRUCCIÓN DEL EJEMPLO

Sean $A_0^1 = \mathcal{G}_2$, A_0^2 el árbol cuyos vértices son $\{e, a, a^2 ...\}$ y $r_0 = 2$. Para construir A_1^1 y A_1^2, injertamos los árboles $T_0^1 = B_{A_0^1}(e,2)$ y $T_0^2 = B_{A_0^2}(e,2)$ sobre los vértices v de A_0^1 y A_0^2 que verifiquen que $d_{A_0^i}(e,v) \equiv r_0 \; mod \; r_1$, donde $i = 1,2$ y $r_1 = 2r_0$.



Para un $p \geq 1$, tomamos $r_{p+1} = 2r_p$ y construimos el árbol A_{p+1}^1 (resp. A_{p+1}^2) injertando sobre los vértices que verifiquen $d_{A_p^1}(e,v) \equiv r_p mod \, r_{p+1}$ (resp. $d_{A_p^2}$) los árboles T_p^1 y T_p^2, que en este caso serán los saturados verticales de las bolas $B_{A_p^i}(e, r_p)$ para $i = 1,2$.

Finalmente se definen los árboles A_∞^1 y A_∞^2 como la unión de todos los árboles A_p^1 y A_p^2 respectivamente con $p \in \mathbb{N}$. Ambos son repetitivos y por tanto $X = \overline{\mathscr{R}[A_\infty^1]} = \overline{\mathscr{R}[A_\infty^2]}$ es un conjunto $\mathscr{R}$-saturado minimal de $\mathcal{T}$. En este caso, cada elemento T de X es aperiódico y su órbita $\mathcal{O}_T$ es isomorfa a T.

5 CRECIMIENTO Y NÚMERO DE RAMIFICACIÓN

Para concluir, vamos a determinar el crecimiento y el número de ramificación de las órbitas genéricas respecto de una medida invariante. Para construir esta medida, denotamos por D_p a una copia de $T_p^1 \cap \mathcal{G}_2$ injertada sobre algún vértice de A_∞^1. Puesto que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\#\partial D_p}{\# D_p} = 0,$$

tomando una subsucesión si fuese necesario, las medidas de probabilidad $\mu_p = \frac{1}{\sharp D_p}\Sigma_{v\in D_p}\delta_v$ convergen a una medida de probabilidad μ invariante por $\mathscr{R}$. En esta situación, tenemos:

- μ-casi toda órbita $\mathcal{O}_T$ tiene crecimiento exponencial, ya que el conjunto $E = \{T \in X \mid \sharp B_T(e,2m) \geq 3^m \;\; \forall m \in \mathbb{N}\}$ verifica que $\mu(E) = 1$.
- μ-casi toda órbita $\mathcal{O}_T$ tiene un único final. En principio, puesto que la característica de Euler de μ es nula, $\mathcal{O}_T$ tiene 1 o 2 finales. Ahora bien, según un resultado de G. Levitt [6], μ-casi toda órbita con 2 finales tiene crecimiento lineal.
- La relación $\mathscr{R}$ es μ-promediable, según un resultado de [1], ya que el número de ramificación de μ-casi toda órbita es 1.

Esta propiedades son ciertas también para las órbitas genéricas en sentido topológico, es decir, para conjuntos saturados residuales.

References

[1] F. Alcalde Cuesta, M. P. Fernández de Córdoba, Nombre de branchement d'un pseudogroupe. En preparación.

[2] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. Por aparecer en *Bull. Braz. Math. Soc.*

[3] E. Blanc, Examples of mixed minimal foliated spaces. Preprint, 2002.

[4] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann, *Panor. Synth.* , **8** (1999), 49-95.

[5] E. Ghys, V. Sergiescu, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology*, **19** (1980), 179-197.

[6] G. Levitt, On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15** (1995), 1173-1181.

[7] W. Thurston, Non cobordant foliations of S^3. *Bull. Amer. Math. Soc.* , **78** (1972), 511-514.

*Trabajo parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 y la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria da Xunta de Galicia.
Gracias a Álvaro Lozano Rojo por la segunda figura.