

Invariantes de Vassiliev de primer orden de aplicaciones estables de 3-variedades en R^3

Raúl Oset Sinha
(Universitat de València)

1. Invariantes de Vassiliev

Definición.- El *discriminante* de $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ es el subconjunto de aplicaciones con singularidades no estables. Se denotará por Δ .

Definición.- Dada $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diremos que $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un *desdoblamiento versal* de f si:

- $F(x, 0) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\hat{F}: \mathbb{R}^k \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es transversal a todas las \mathcal{A} -órbitas en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\hat{F}(y) = F_y$.

Definición.- Sean $f, g \in C^\infty(X, Y)$, diremos que son *establemente isotópicas* si están en la misma arco-componente del conjunto de aplicaciones estables en $C^\infty(X, Y)$.

Definición.- Sea R un anillo conmutativo y unitario, un *invariante de isotopía estable* es una aplicación

$$V: C^\infty(X, Y) \setminus \Delta \rightarrow R$$

tal que si f y g son establemente isotópicas, entonces $V(f) = V(g)$.

El conjunto de invariantes de isotopía estable en $C^\infty(X, Y) \setminus \Delta$ con valores en el anillo R viene dado por el R -módulo

$$H^0(C^\infty(X, Y) \setminus \Delta, R)$$

V. A. Vassiliev ha desarrollado una teoría general para la obtención de invariantes de isotopía en espacios de aplicaciones estables: *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*. AMS, Providence, 1992.

Las técnicas de Vassiliev se basan en el análisis de las estratificaciones del subconjunto discriminante Δ . Los principales pasos del método son:

- Determinar los estratos de codimensión 1 and 2.
- Determinar las relaciones de incidencia entre ellos (usando desdoblamientos versales).
- Obtener todas las condiciones de compatibilidad (usando los diagramas de bifurcación de los estratos de codimensión 2).

Estas técnicas se han aplicado en:

- Aplicaciones estables de S^1 en \mathbb{R}^3 (nudos): [V2]
- Aplicaciones estables de S^1 en \mathbb{R}^2 : [A1]
- Aplicaciones estables de superficies en \mathbb{R}^3 : [Gor]
- Aplicaciones estables de superficies en \mathbb{R}^2 : [OA]
- Aplicaciones estables de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 : [Ya]

2. Aplicaciones de R^3 en R^3

El conjunto singular de una aplicación estable de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 tiene superficies de puntos de pliegue con ejes cuspidales, colas de golondrina (swallowtails) aisladas, curvas de auto-intersección, intersecciones aisladas de ejes cuspidales con superficies de pliegue y puntos triples aislados. El dibujo representa la imagen del conjunto singular, es decir, el conjunto de ramificación.

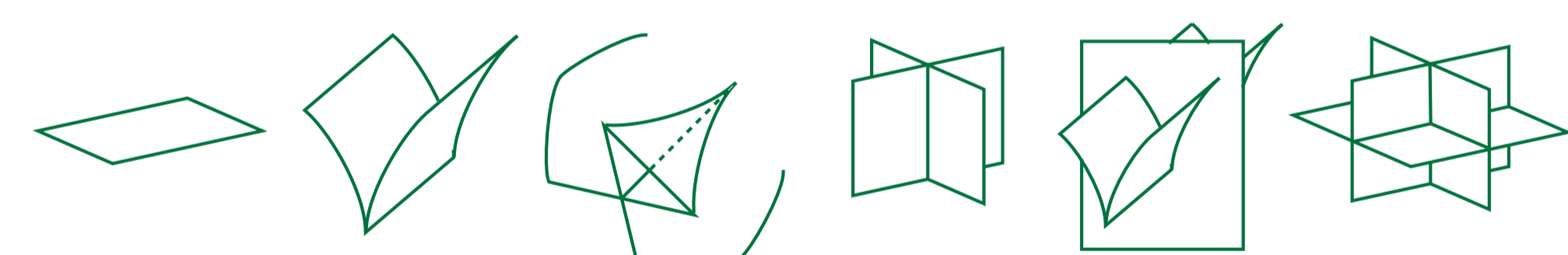


Tabla con todos los monogérmenes simples de corango 1 de aplicaciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 obtenida por Marar y Tari en [MT].

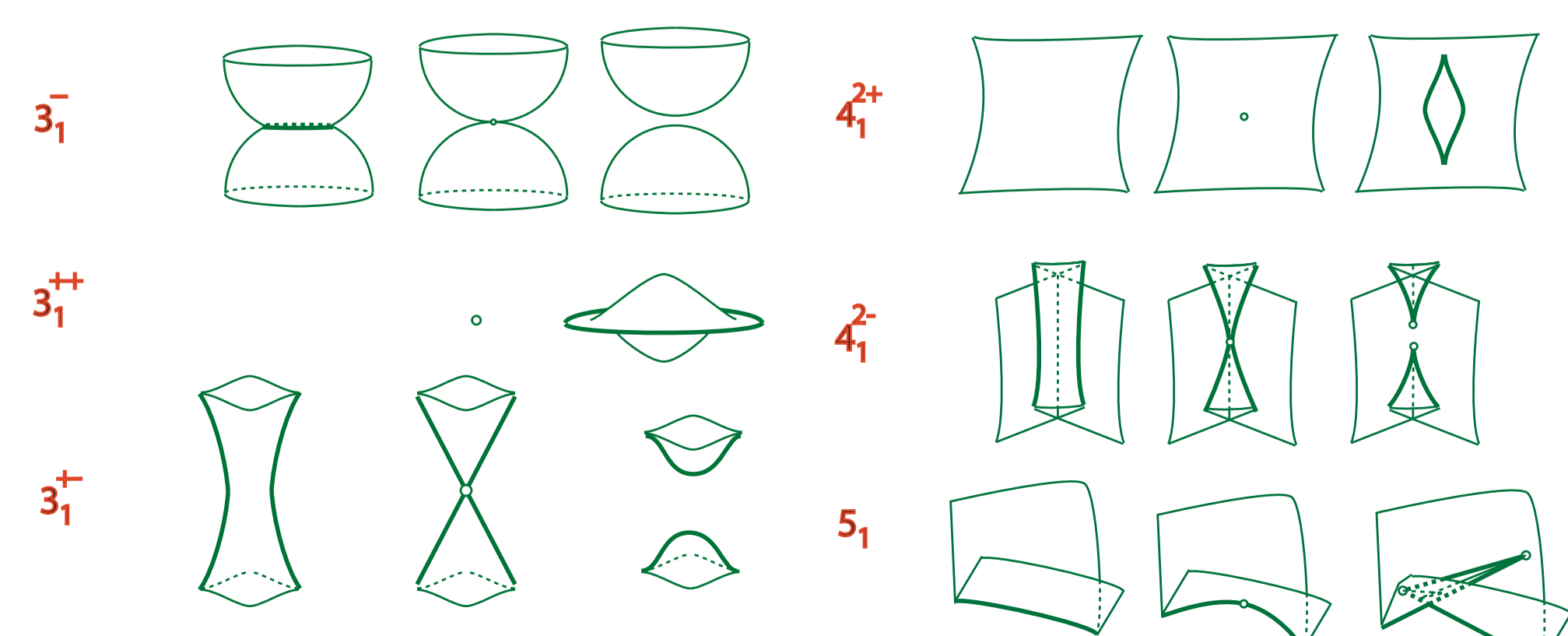
Name	Normal form	\mathcal{A}_e -codimensión
A_1	(x, y, z^2)	0
$3_\mu(P)$	$(x, y, z^3 + P(x, y)z)$	$\mu(P)$
4_k^1	$(x, y, z^4 + xz \pm y^k z^2), k \geq 1$	$k-1$
4_k^2	$(x, y, z^4 + (y^2 \pm x^k)z + xz^2), k \geq 2$	k
5_1	$(x, y, z^5 + xz + yz^2)$	1
5_2	$(x, y, z^5 + xz + y^2 z^2 + yz^3)$	2

De la tabla obtenemos los monogérmenes estables:

A_1 , que corresponde a puntos de pliegue; 3_0 que corresponde a puntos de cúspide (A_2); y 4_1^1 que corresponde a colas de golondrina (A_3).

Singularidades de codimensión 1: $3_1^{++}, 3_1^{+-}, 3_1^{-+}, 4_1^{++}, 4_1^{+-}$ y 5_1 .

Singularidades de codimensión 2: $3_2^+, 3_2^-, 4_2^+, 4_2^-, 4_2^0$ y 5_2 .

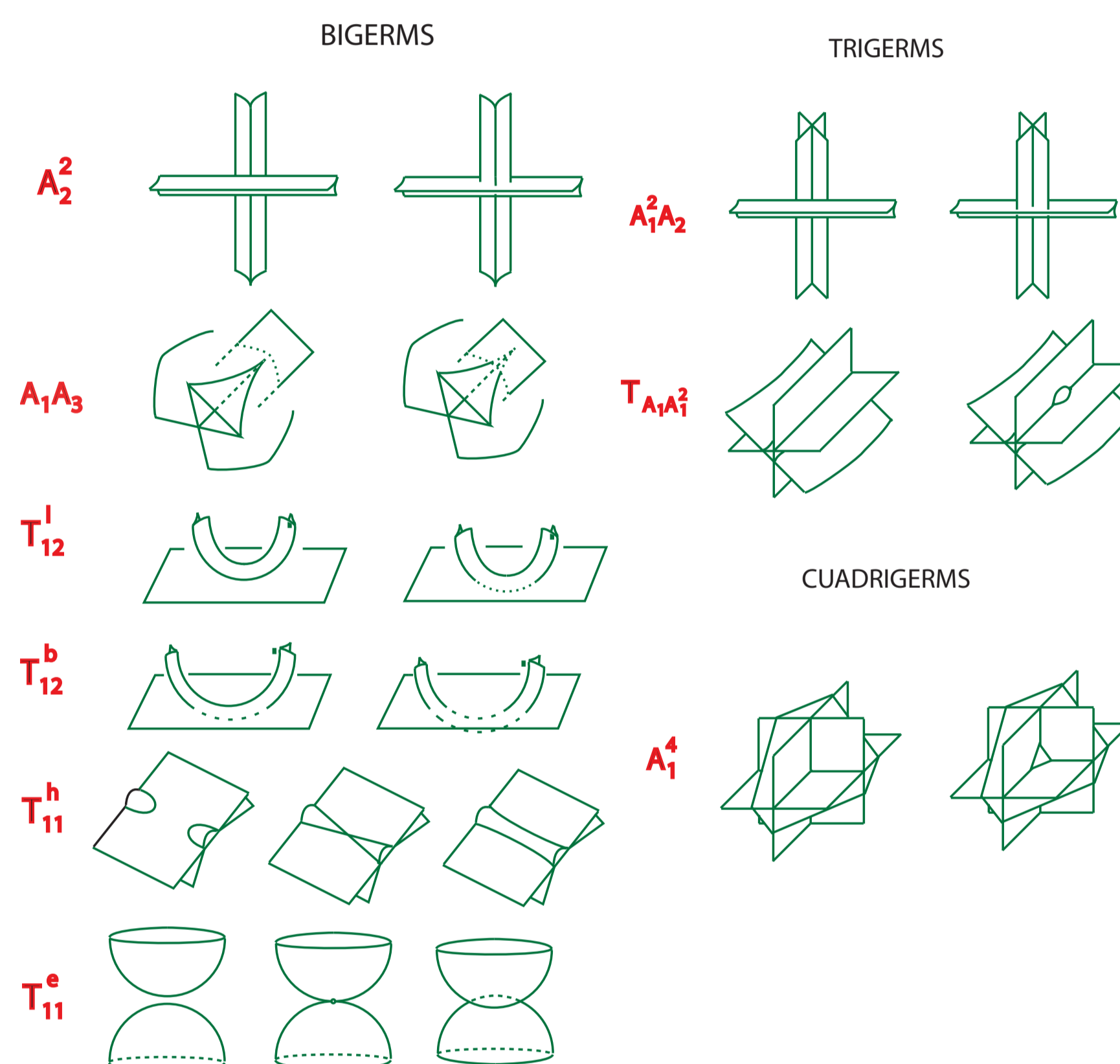


Teorema.- Todas las singularidades de corango 1 de aplicaciones de $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ hasta codimensión 2 son:

	Mono-	Bigerms	Tri-	Cuadri-	Penta-
estables	A_1 A_2 A_3	A_1^2 $A_1 A_2$	A_1^3		
cod1	3_1^+ 4_1^{++} 5_1	A_2^2 $A_1 A_3$ T_{12}^+, T_{12}^h	$T_{A_1 A_2^2}$ $A_1^2 A_2$	A_1^4	
cod2	3_2^+ 4_1^3 4_2^+ 5_2	A_1^3 $A_1^2 A_2$ $A_1^2 A_3$ $A_1 A_2 A_3$ T_{13} $D T_{11}$ $D T_{12}$	$A_1 A_2^2$ $A_1^2 A_3$ $A_1 T_{12}^+, A_1 T_{11}^h$ $A_1 T_{12}^-, A_1 T_{12}^0$ $D T_{A_1 A_2^2}$	$A_1^3 A_2$ $A_1 T_{A_1 A_2^2}$	A_1^5

Ejemplos de notación:

- A_1^3 denota la intersección transversal de 3 superficies de puntos de tipo A_1 , i.e. un punto triple.
- $A_1 A_2$ denota la intersección de una superficie de pliegues (A_1) con un eje cuspidal (A_2).
- T_{12} representa una tangencia entre una superficie de puntos de pliegue con un eje cuspidal.
- $D T_{A_1 A_2^2}$ representa una tangencia degenerada entre una superficie de puntos de pliegue (A_1) con una curva de puntos dobles (A_2^2).



Nota.- Las singularidades de codimensión 1 y corango 2 son el umbílico elíptico e hiperbólico, que por motivos técnicos ([B]) no son necesarias.

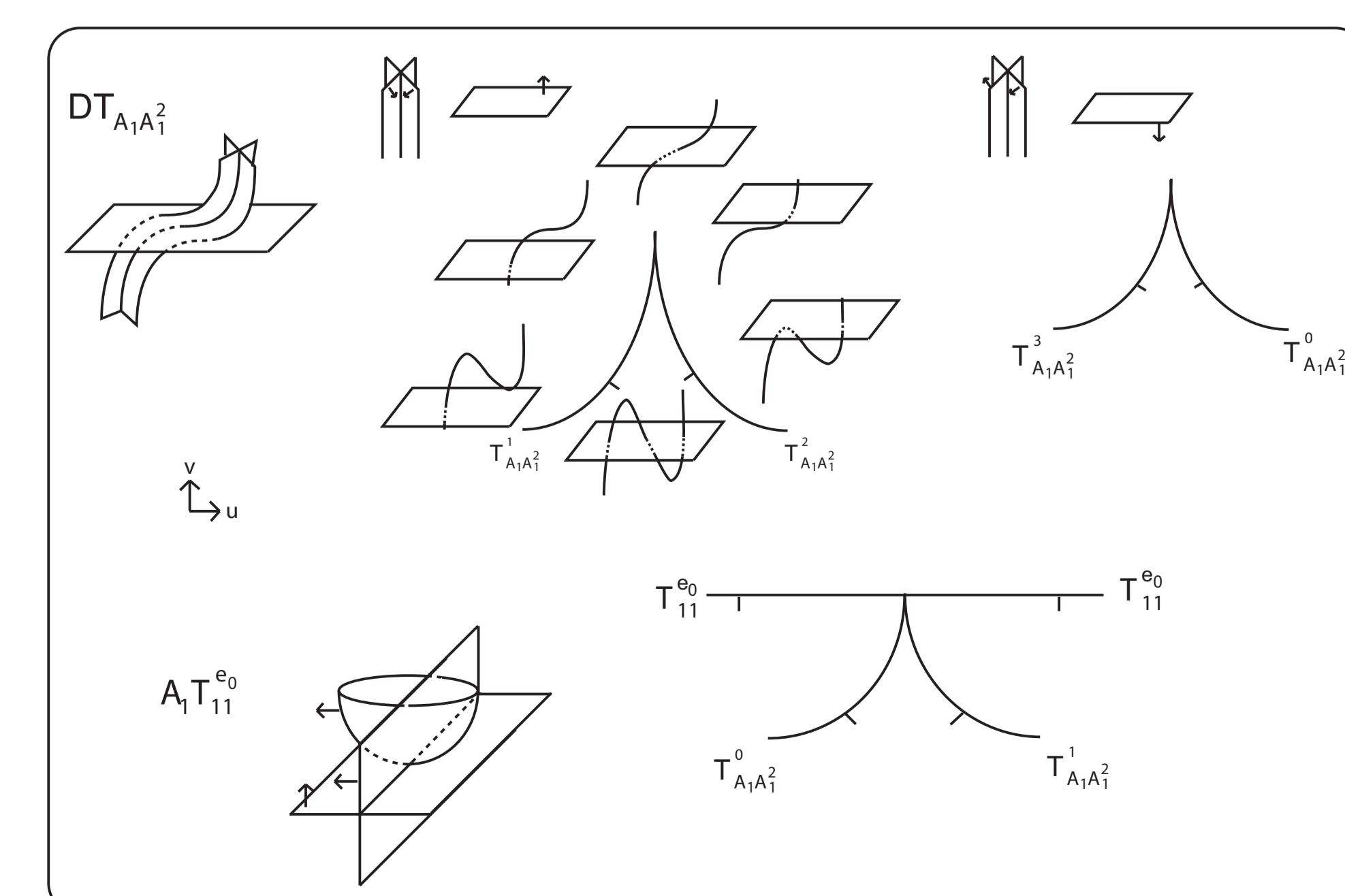
3. Invariantes semi-locales de primer orden de aplicaciones estables de 3-variedades en R^3

Ecuación general de la variación de un invariante a través de un camino genérico (transversal a los estratos de codimensión 1) en $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

$$\Delta I = \sum_i n_{S_i} \Delta S_i = n_{3_1^{++}} \Delta 3_1^{++} + n_{3_1^{+-}} \Delta 3_1^{+-} + n_{3_1^{-+}} \Delta 3_1^{-+} + n_{4_1^{++}} \Delta 4_1^{++} + n_{4_1^{+-}} \Delta 4_1^{+-} + n_{5_1} \Delta 5_1 + n_{A_2^2} \Delta A_2^2 + n_{A_1 A_3} \Delta A_1 A_3 + n_{A_1 A_2} \Delta A_1 A_2 + n_{T_{12}^+} \Delta T_{12}^+ + n_{T_{12}^h} \Delta T_{12}^h + n_{T_{12}^-} \Delta T_{12}^- + n_{T_{12}^0} \Delta T_{12}^0 + n_{T_{A_1 A_2^2}} \Delta T_{A_1 A_2^2} + n_{D T_{A_1 A_2^2}} \Delta D T_{A_1 A_2^2} + n_{A_1^3} \Delta A_1^3 + n_{A_1^2 A_3} \Delta A_1^2 A_3 + n_{A_1 A_2 A_3} \Delta A_1 A_2 A_3 + n_{A_1 T_{12}^+} \Delta A_1 T_{12}^+ + n_{A_1 T_{11}^h} \Delta A_1 T_{11}^h + n_{A_1 T_{12}^-} \Delta A_1 T_{12}^- + n_{A_1 T_{12}^0} \Delta A_1 T_{12}^0 + n_{A_1^2 A_2} \Delta A_1^2 A_2 + n_{A_1^2 A_3} \Delta A_1^2 A_3 + n_{A_1 A_2 A_3} \Delta A_1 A_2 A_3 + n_{A_1^4} \Delta A_1^4 + n_{A_1^3 A_2} \Delta A_1^3 A_2 + n_{A_1^2 A_3} \Delta A_1^2 A_3 + n_{A_1 A_2 A_3} \Delta A_1 A_2 A_3 + n_{A_1^5} \Delta A_1^5$$

donde n_{S_i} representa el número de veces que el camino cruza el estrato S_i y ΔS_i el incremento o variación del invariante al cruzar S_i .

Ejemplos de diagramas de bifurcación de estratos de codimensión 2 y condiciones de compatibilidad:



Consecuencia.- $n_{T_{A_1 A_2^2}}^0 = n_{T_{A_1 A_2^2}}^1 = n_{T_{A_1 A_2^2}}^2 = n_{T_{A_1 A_2^2}}^3$

Teorema.- Sistema coherente o condiciones de compatibilidad:

- $n_{3_1^{++}} = n_{3_1^{+-}} = n_{3_1^{-+}}$, ii) $n_{4_1^{++}} = n_{4_1^{+-}}$, iii) $n_{A_2^2 A_2^2} = n_{A_2^2 A_2^2} = n_{A_2^2 A_2^2}$
- iv) $n_{A_1^3} = n_{A_1^3} = 0$, v) $n_{A_1 A_3} = n_{A_1 A_3}$, vi) $n_{T_{12}^+} = n_{T_{12}^+} = n_{T_{12}^+} = n_{T_{12}^+}$
- vii) $n_{T_{12}^0} = n_{T_{12}^0} = n_{T_{12}^0} = n_{T_{12}^0}$, viii) $n_{T_{11}^h} = n_{A_2^2} = n_{A_1^2} = 0$
- ix) $n_{A_1 A_3} + n_{A_1 A_3} - n_{T_{12}^+} - n_{T_{12}^+} - n_{T_{12}^+} = 0$, x) $n_{5_1} = n_{4_1^{++}} + n_{T_{12}^+}$
- xi) $n_{T_{11}^0} = n_{T_{11}^0} = -n_{T_{11}^0} + n_{T_{11}^0} = 0$, xii) $n_{A_1 A_3} + n_{A_1 A_3} - n_{A_1^2 A_2} - n_{A_2^2} = 0$
- xiii) $2n_{A_1 A_3} - 2n_{T_{12}^+} + n_{T_{12}^0} - 2n_{A_1^2 A_2} = 0$

Teorema.- Cualquier invariante local de primer orden de aplicaciones estables de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, donde M es una 3-variedad compacta, es, módulo invariantes de orden 0 (constantes), una combinación lineal de:

- I_s , el número de swallowtails ($\#A_3$), cuya variación es $\Delta I_s = 2\Delta 4_1^2 + 2\Delta 5_1$
- I_t , el número de puntos triples ($\#A_1^3$), cuya variación es $\Delta I_t = 2\Delta T_{A_1 A_2^2} + \Delta A_1 A_3 + 2\Delta A_1^2 A_2$
- $I_{A_1 A_2}$, el número de puntos de tipo $A_1 A_2$ ($\#A_1 A_2$), cuya variación es $\Delta I_{A_1 A_2} = 2\Delta T_{12} + 2\Delta A_1 A_3 + 4\Delta A_2^2 + 2\Delta 5_1$
- I_χ , la característica de Euler del conjunto de ramificación ($\chi(\Delta)$), $\Delta I_\chi = 2\Delta 3_1 + \Delta 4_1^2 + \Delta 5_1 + 2\Delta T_{A_1 A_2^2} + \Delta A_1 A_3 + 2\Delta A_1^2 A_2$
- I_ℓ , el linking invariant, cuya variación es $\Delta I_\ell = -\Delta 3_1 + 2\Delta T_{11}^0 - 2\Delta T_{11}^e + 2\Delta T_{11}^h$

Definición del linking invariant:

Sea L_f^+ el levantamiento Legendriano canónico de $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ a la variedad de contacto $ST^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times S^2$ que asigna a cada punto en Δ su plano tangente positivamente coorientado. Sea L_f^- el levantamiento negativo.

Se debe "parhear" la S^2 -fibra de los puntos a lo largo de ejes cuspidales con un semi-ecuador y la S^2 -fibra de los swallowtails con un hemisferio entero.

Sea V_f^- la 3-cadena definida por la extensión de L_f^- en una dirección de \mathbb{R}^3 (la imagen de $\mathbb{R}^+ \times \Delta$). Sea $L_{f,\epsilon}^+$ el movimiento de L_f^+ que lleva cada punto (a, n) a $(a + n\epsilon, n)$.

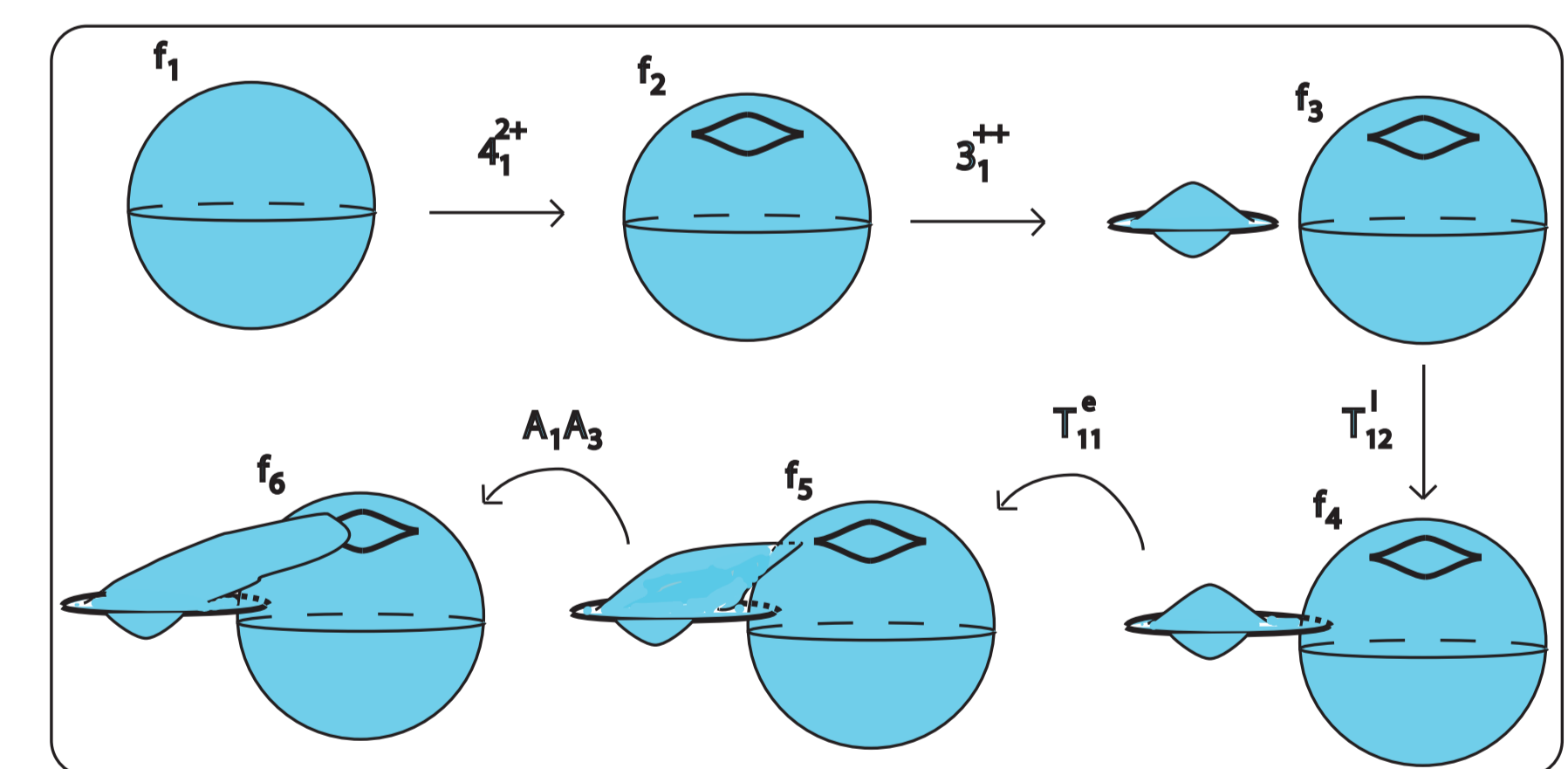
Definimos el invariante como: $l := I(L_{f,\epsilon}^+, V_f^-)$

Nota.- Este invariante es una generalización del invariante de Bennequin para nudos Legendrianos.

Independencia de los invariantes.- Escribiendo una combinación lineal de los cinco invariantes

$$aI_s + bI_t + cI_{A_1 A_2} + dI_\chi + eI_\ell = 0$$

y evaluándola sobre 5 ejemplos distintos obtenemos como única solución $a = b = c = d = e = 0$ demostrando así que son independientes. Las relaciones que los estratos de codimensión 2 y corango 2 que pueda haber son irrelevantes gracias a este resultado.



Invariantes no locales.- Subdividiendo ciertos estratos de codimensión 1 dependiendo de si tras la transición sus curvas (ejes cuspidales o auto-intersecciones) pertenecen a la misma componente conexa o no, tenemos otros dos invariantes no locales:

$$\Delta I_6 = \Delta 3_1^{++} - \Delta 3_1^{+-} + \Delta 3_1^{-+} - \Delta 3_1^{+-} + \Delta 4_1^{++} + \Delta 4_1^{+-} - \Delta 4_1^{+-} - \Delta 4_1^{+-}$$

$$\Delta I_7 = \Delta T_{11}^e + \Delta T_{12}^+ + \Delta T_{12}^h - \Delta T_{12}^0 + \Delta T_{11}^h - \Delta T_{11}^h + \Delta A_1 A_3 + \Delta A_2^2$$

el número de ejes cuspidales y el número de curvas de auto-intersección respectivamente.

*Póster basado en el trabajo conjunto con M.C. Romero Fuster [OR].

Referencias

- [A1] V. I. ARNOL'D *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University lecture series, Vol. 5, AMS Providence (1994).
- [B] J.W. BRUCE. *A classification of 1-parameter families of map germs $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ with applications to condensation problems*. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986), no. 2, 375-384.
- [Gor] V. GORYUNOV *Local invariants of mappings of surfaces into three space*. The Arnol'd-Gelfand mathematical seminars 223-225. Birkhauser, Boston, (1997).
- [MT] W.L. MARAR AND F. TARI. *On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^3* . Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996), no. 3, 469-481.
- [OA] T. OHMOTO AND F. AICARDI. *First order local invariants of apparent contours*. Topology 45 (2006), 27-45.
- [OR] R. OSET SINHA AND M.C. ROMERO FUSTER. *First order semi-local invariants of stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3* . Preprint(2007).
- [V2] V. VASSILIEV *Cohomology of knot spaces*. Advances in Soviet Math. 1 23-69 (1990).
- [Ya] M. YAMAMOTO *First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane*. Proc. London Math. Soc. (3) 92 (2006), no. 2, 471-504.