GRAFOS DE APLICACIONES ESTABLES DE SUPERFICIES EN LA 2-ESFERA

CATARINA MENDES DE JESUS cmendes@ufv.br
Universidade Federal de Viçosa-Br
M. CARMEN ROMERO FUSTER carmen.romero@uv.es

1. Aplicaciones estables

- M: superficie cerrada orientable.
- *Teorema de Whitney* $\Rightarrow$ *Las singularidades de las aplicaciones estables de M en S^2 son pliegues y cúspides.*
- Σf: conjunto singular de f. Está formado por curvas regulares simples de pliegues con puntos aislados de tipo cúspide.
- Δf: contorno aparente de f (imagen de Σf). Está formado por curvas con cúspides aisladas y auto-intersecciones transversales.
- Si dos apliciones $f, g : M \to S^2$ son *$\mathcal{A}$-equivalentes*, entonces Σf y Σg difeomorfos en M y $\Delta(f)$ y $\Delta(g)$ difeomorfos en S^2.

2. Grafos y aplicaciones

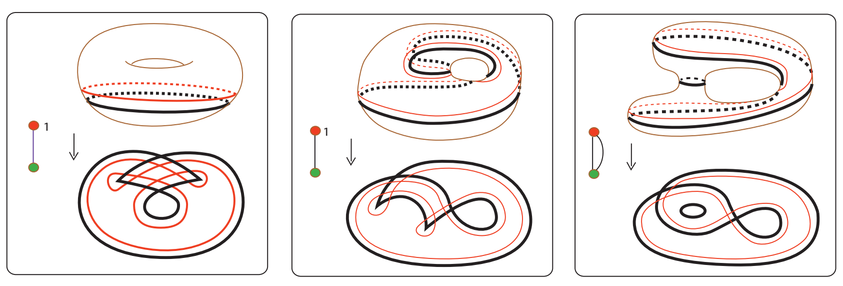
El *complemento* de una colección finita $\mathcal{C}$ de curvas cerradas en una supericie M es una unión disjunta de superficies. La *frontera* de cada una de ellas es una sub-colección de curvas de $\mathcal{C}$.

Se define el grafo $\mathcal{G}(M,\mathcal{C})$ como el *grafo dual de $\mathcal{C}$*.

- Cada arcocomponente de $M-\mathcal{C}$ determina un *vértice* y cada curva de $\mathcal{C}$ una *arista*.
- un *vértice* v y una *arista* a son incidentes si y solo si la curva representada por a se encuentra en la frontera de la región representada por v.
- Asociamos a cada vértice v un *peso* $g(v)$ igual al *género* de la región de $M-\mathcal{C}$ que representa.
- Todo grafo con pesos es isomorfo al grafo de par $(M,\mathcal{C})$ un único salvo $\mathcal{A}$-equivalencia. El género de la superficie M viene dado por
$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}(M,\mathcal{C})) + \Sigma g(v),$$
donde la suma incluye a todos los vértices del grafo $\mathcal{G}(M,\mathcal{C})$.

Dada $f : M \to S^2$, el grafo $\mathcal{G}(f)$ es el *grafo dual* de Σf en M.

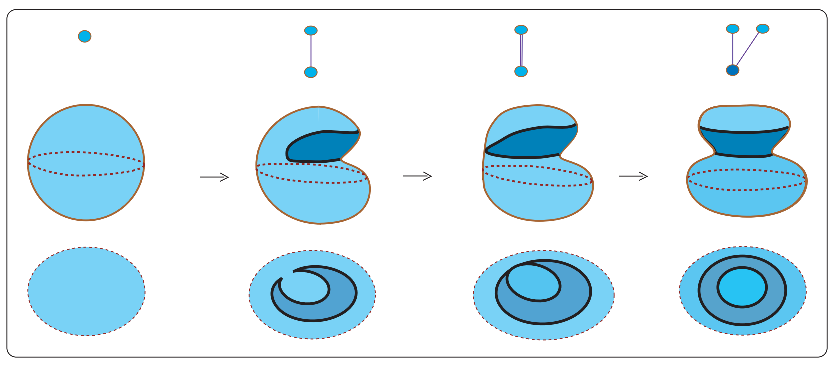
El grafo es un $\mathcal{A}$-invariante global. En particular el número I_μ de aristas del grafo es un invariante.



Ejemplos de aplicaciones del toro con grado 0 con cúspides y sin cúspides.

3. Problemas Basicos

1. **¿Qué grafos pueden ser asociados a aplicaciones estables de superficies cerradas en la esfera?**
2. **¿Cuales son todos los contornos aparentes correspondientes a un mismo grafo?**
3. **¿Qué grafos pueden ser asociados a submersiones con pliegues?**



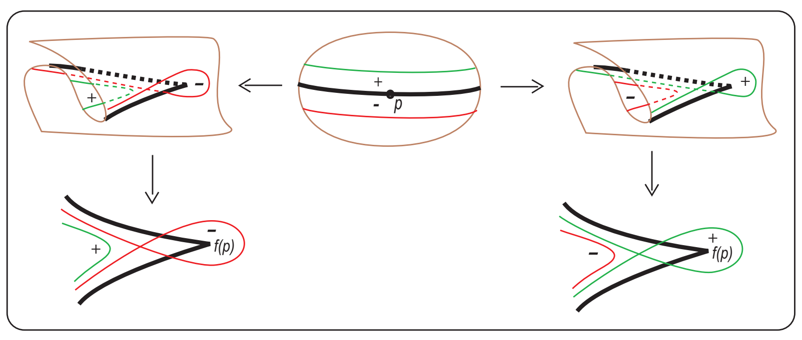
Ejemplos de grafos de aplicaciones estables de S^2 en la S^2 con grado 1.

Se dice que un grafo es *bipartito* si es posible asignar etiquetas $\pm$ a sus vértices de manera que cada arista acabe en vértices con etiquetas opuestas.

Teorema: Un grafo (con pesos arbitrarios en los vértices) puede ser el grafo de una aplicación estable de una superficie M en la esfera $\iff$ es bipartito y
$$\chi(M) = 2(p - \chi(\mathcal{G})),$$
donde p es igual a la suma de todos los pesos en $\mathcal{G}$.

4. Grafos y cúspides

Definimos signos $\pm$ en las cúspides de una aplicación estable f en función de la orientación de las regiones hacia las que apuntan las cúspides.



Ejemplos de signos en las cúspides.

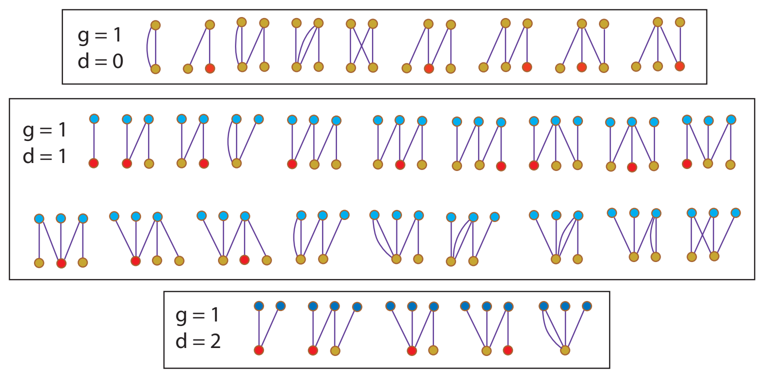
Proposicion: Si $CP = C^+ - C^-$, es la diferencia entre los números de cúspides con signos positivos y negativos de $f : M \to S^2$, entonces
$$CP = 2[d + (g^+ - g^-) - (V^+ - V^-)].$$
Por lo tanto, una aplicación estable no tiene cúspides $\iff d + g^+ - g^- = V^+ - V^-$.

5. Submersiones con pliegues

Una aplicación estable de una superficie M en el plano es llamada *submersión con pliegues* si no tiene cúspides. En este caso todas las curvas del contorno aparente son regulares.

Decimos que un grafo con pesos es *d-equilibrado* si se verifica la siguiente igualdad
$$V^+ - V^- = g^+ - g^- + d,$$
donde V^+ y V^- denotan respectivamente los números de vértices con etiquetas positivas y negativas, g^+ y g^- el género de las regiones correspondientes y $d \in \mathbb{N}$.

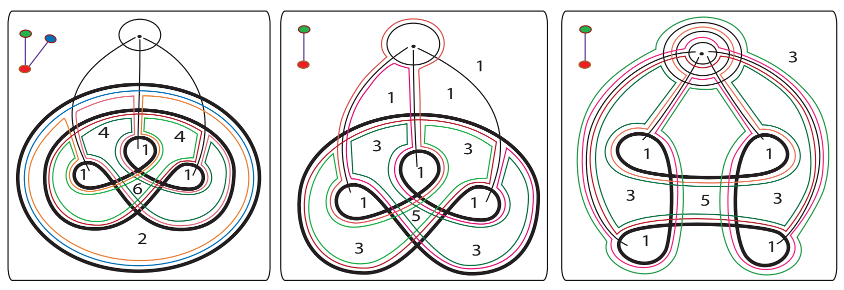
Teorema: Un grafo bipartito $\mathcal{G}$ puede ser el grafo de una submersión con pliegues con grado d de una superficie en la 2-esfera $\iff$ $\mathcal{G}$ es d-equilibrado.



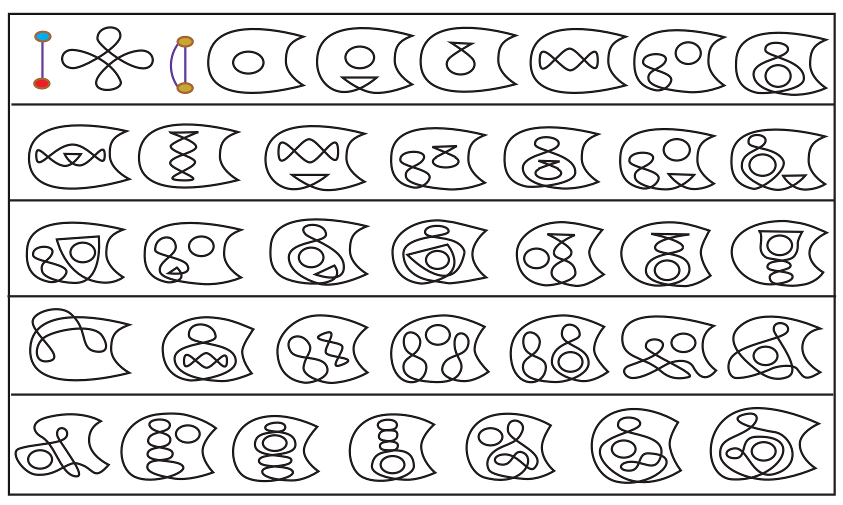
Posibles grafos de submersiones con pliegues del toro en la esfera con $m \leq 5$ aristas y grado $d \leq 2$:

6. Contornos aparentes

Proposicion: Un conjunto de curvas en la esfera es un contorno aparente $\iff$ admite una decomposicion en curvas cerradas simples con la misma orientación.



Ejemplos de decomposiciones en curvas cerradas simples del contorno aparente del toro de grado 1 y grado 2.



Posibles contornos aparente del toro con $m \leq 2$ curvas y grado $d = 1$.