# Trenzas y puntos singulares. Cálculos efectivos y clasificación de Nielsen-Thurston.


**Sergio Martínez Juste**
*Departamento de Matemáticas*
*Universidad de Zaragoza*
*sergiomj@unizar.es*



## resumen

Nuestro interés es el estudio topológico de los puntos singulares de curvas planas en $\mathbb{C}^2$. Estos puntos tienen asociado un objeto topológico, un enlace, que codifica el encaje de un entorno del punto singular en una bola suficientemente pequeña. La monodromía de trenzas del punto singular, objeto principal de este trabajo, nos proporciona una clase de conjugación en el grupo de trenzas cuya clausura es el enlace de la singularidad, por lo que describe la topología. Nos centramos en obtener de manera algorítmica un representante de dicha clase de conjugación a partir de los invariantes de Puiseux. El estudio detallado de la construcción de la trenza nos permite clasificarla según la teoría de Nielsen-Thurston. Gracias a esta clasificación podemos reconstruir toda la información sobre una singularidad a partir de su trenza.


## ¿Qué es una singularidad?

Consideremos el anillo de polinomios, $\mathbb{C}[x,y]$. A cada elemento $f \in \mathbb{C}[x,y]$ le asociamos su conjunto de ceros en $\mathbb{C}^2$, es decir, el conjunto $\mathcal{C}_f := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$, a este conjunto lo llamaremos *curva* definida por $f$.

Sea $P := (x_0, y_0) \in \mathcal{C}_f$ diremos que $P$ es un *punto singular* si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$$

en caso contrario se dice que $P$ es un *punto regular (o liso)*.

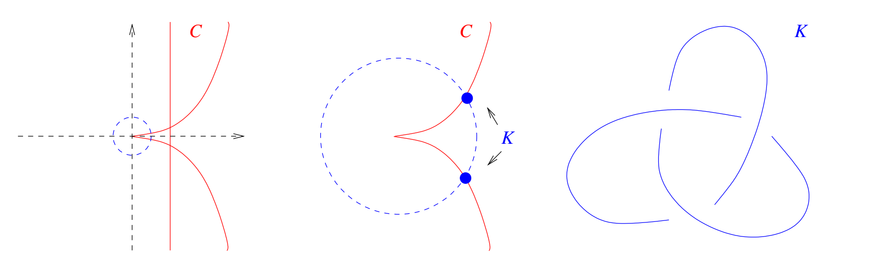
Observar que los puntos singulares son aquellos en los que no se puede definir de la manera habitual el espacio tangente.

## Topología de un punto singular.

El siguiente resultado, que podemos encontrar en el clásico libro de Milnor [**Mi**], nos asocia el estudio topológico de las singularidades de curvas planas con la teoría de nudos.

**Teorema:** Sea $P$ un punto singular de $\mathcal{C}$ (suponer que es el origen), entonces existe $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que $\forall 0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, la intersección $\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^3_{\varepsilon'}$ es transversa. Más aún, si llamamos $K = \mathcal{C} \cap \mathbb{S}^3_\varepsilon$ y $C(-)$ la operación *tomar cono*, se tiene que $(\mathbb{B}^4, \mathcal{C} \cap \mathbb{B}^4)$ es homeomorfo al par $(C(\mathbb{S}^3_\varepsilon), C(K))$.

El teorema anterior nos dice que, localmente, la topología del encaje de la curva viene determinada por la topología del encaje de $K$ en una esfera tridimensional. Pero por la transversalidad y las dimensiones involucradas $K$ es claramente un enlace.




*Enlace asociado al punto singular* $(0,0)$ *para la curva* $\mathcal{C} = (y^2 - x^3)(x-1)$

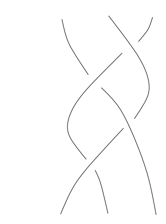
## ¿Qué es una trenza?

Damos primero la definición geométrica e intuitiva de trenza: Llamamos *traslación de $n$ puntos* con origen en $Y = \{y_1, ..., y_n\} \subset \mathbb{C}$ y final en $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_n\} \subset \mathbb{C}$ a un conjunto $\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ de caminos continuos cumpliendo:

**1.-** $Y = \gamma(0) := \{\gamma_1(0), \gamma_2(0), \ldots, \gamma_n(0)\}$ **2.-** $\widetilde{Y} = \gamma(1)$ **3.-** $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t), \forall i \neq j, t \in [0,1]$.

A partir de aquí se define, de manera inmediata, la homotopía entre traslaciones y la composición de traslaciones. Así se define el *conjunto de trenzas* entre $Y$ e $\widetilde{Y}$ como el *conjunto de clases de homotopía* de traslaciones entre $Y$ e $\widetilde{Y}$ y se denota por $\mathbb{B}_n(Y, \widetilde{Y})$. Si $Y = \widetilde{Y}$ denotamos al conjunto de trenzas por $\mathbb{B}_n(Y)$ y claramente **la composición le confiere estructura de grupo** (todos isomorfos independientemente de $Y$). Cuando $Y = \{1, ..., n\}$ denotaremos el *grupo de trenzas de $n$ hilos* por $\mathbb{B}_n$.

**Teorema:**
**[E. Artin, [Ar]]** El grupo de trenzas $\mathbb{B}_n$ tiene una presentación finita dada por:
$\mathbb{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \; |i-j| > 1, \;\; \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle.$
La trenza $\sigma_i$ viene dada por el conjunto de caminos
$\left\{1, 2, \ldots, i-1, (i+1/2) - 1/2e^{\pi\sqrt{-1}t}, (i+1/2) + 1/2e^{\pi\sqrt{-1}t}, i+2, \ldots, n\right\}$



*Trenza* $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2$.

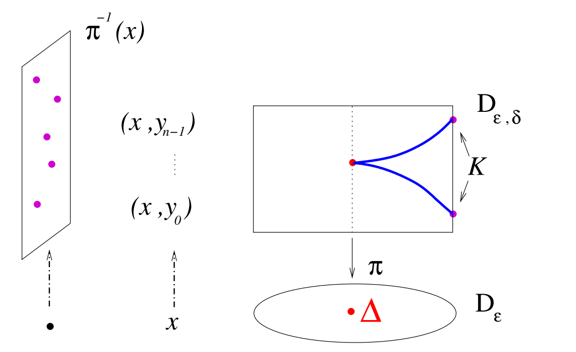
Para relacionar el estudio del grupo de trenzas con la teoría de Nielsen-Thurston es necesario introducir otra caracterización del grupo de trenzas. Dado $D \subset \mathbb{C}$ disco cerrado e $Y \subset \mathbb{C}$ con $\sharp Y = n$. Diremos que $h : D \to D$ es un *homeomorfismo especial* si cumple :

**1.-** $h$ homeomorfismo **2.-** $h(Y) = Y$ **3.-** $h|_{\partial D} = Id_{\partial D}$.

El conjunto de clases de isotopía de estos homeomorfismos especiales, $\mathcal{B}(D, Y)$, dotado con la composición de aplicaciones, adquiere estructura de grupo. Cuando $Y = \{1, ..., n\}$ y $D$ es el disco cerrado de centro y radio $\frac{n+1}{2}$ lo denotamos por $\mathcal{B}_n$. Los giros de Dehn nos permiten dar un sistema explícito de generadores y comprobar que **$\mathcal{B}_n$ y $\mathbb{B}_n$ son grupos antiisomorfos**.

## Trenzas y singularidades. Invariantes de Puiseux.

Pedimos que $f \in \mathbb{C}[x,y]$ sea mónico en la variable $y$, sea $n$ =grado$_y f$. Suponemos que $f$ es localmente irreducible ($f$ irreducible en $\mathbb{C}\{x,y\}$). Entonces, ver [**Br**], existe un polidisco $D_{\varepsilon,\delta} = D_\varepsilon \times D_\delta$, tal que:




- $C \pitchfork \partial D_{\varepsilon,\delta} = C \cap \partial D_\varepsilon \times D_\delta \simeq K$ (corte vertical y transverso que proporciona el enlace).
- $\text{Dis}_y f(x) \sim x^a \Rightarrow \Delta = \{\text{Dis}_y f(x) = 0\} \equiv \{0\}$ (discriminante unipuntual).
- La proyección $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\pi(x,y) = x$, restringida a la curva $\pi| : C \cap D_{\varepsilon,\delta} \to D_\varepsilon$ es una **cubierta ramificada sobre $\Delta$ de $n$ hojas**.

Estudiando la cubierta anterior se prueba la existencia de $n$ series $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$ que parametrizan las $n$ soluciones de $f(x, -) = 0$. Es decir, $\forall x \in D_\varepsilon$, $f(x, y_i(x)) = 0$ para $i = 0, ..., n-1$.

### Invariantes de Puiseux

El anillo $\mathbb{C}\{x^{1/n}\}$ es de factorización única. Calculando el discriminante:

- Es unipuntual: $\text{Dis}_y f(x) \sim x^a$
- Por raíces: $\text{Dis}_y f(x) = \prod_{i \neq j} (y_i - y_j)$

Igualando y factorizando tenemos $y_i - y_j \sim x^{\frac{a_{ij}}{n}}$

- $\{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$ *series de Puiseux* de $f$.
- $\frac{a_{ij}}{n}$ *exponentes de Puiseux*.
- Por un proceso aritmético elemental se construye $\{(n_1, m_1), ..., (n_r, m_r)\}$: *pares de Puiseux*.

**Teorema:** Dos singularidades irreducibles con una proyección de $n$ hojas son topológicamente equivalentes si y solo si tienen los mismos pares de Puiseux.

### Monodromía de trenzas

- $\gamma(t)$ camino en $D_\varepsilon \setminus \Delta$.
- Las $n$ elevaciones de $\gamma$ por la cubierta son $(\gamma(t), y_i(\gamma(t)))$. Y $\{y_i(\gamma(t))\}$ constituyen una traslación de $n$ puntos cerrada.
- A nivel de grupos fundamentales tenemos el homomorfismo monodromía de trenzas

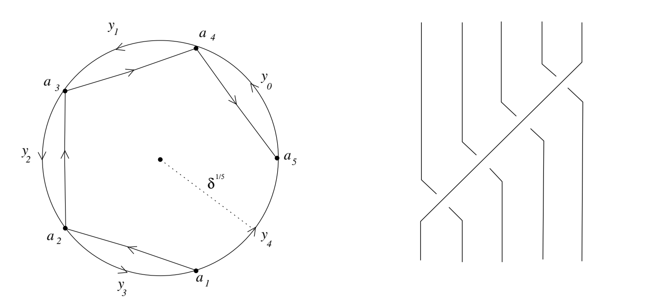
$$\varphi : \pi_1(D_\varepsilon \setminus \Delta, *) \equiv \mathbb{Z} \to \mathbb{B}_n.$$

- El homomorfismo está determinado por la imagen de un generador , $\alpha_f = [\varphi(\partial D_\varepsilon)] = [\{y_i(\partial D_\varepsilon)\}]$.
- La clase de conjugación de $\alpha_f$ depende solo de los pares de Puiseux y la clausura de cualquiera de sus elementos es $K$.

## Construcción de la trenza.

En primer lugar vemos cómo se construye una trenza para una singularidad con solo un par de Puiseux.

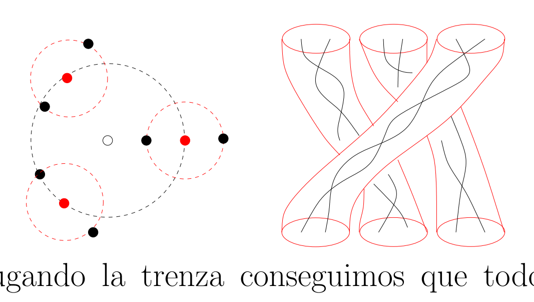
- Modelo $f = y^q - x^p$, $mcd(p,q) = 1$.
- Expansiones de Puiseux $y_i = \xi^i x^{p/q}$.
- Par de Puiseux $(p, q)$.
- $x(t) = \varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ $\quad y_i(t) = \varepsilon^{p/q}\xi^{i+pt}$.
- **Trenza:** $(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{q-1})^p$.



Para más de un par, podemos ir reduciendo la trenza al estudio de trenzas como las del caso anterior, de manera que obtenemos un proceso recursivo. Lo vemos para el caso de dos pares de Puiseux.

- Expansión de Puiseux $y = x^{p_1/q_1} + x^{p_2/q_2}$.
- Pares de Puiseux $(n_1, m_1), (p_1, q_1), (n_2, m_2)$.
- Puntos iniciales y finales sobre el carrusel de la figura.
- **Truco:** Cambio $\overline{x} = x^{1/q_1}, \overline{y} = y - \overline{x}^{p_1}$ entonces $y = x^{p_1/q_1} + x^{p_2/q_2} \to \overline{y} = \overline{x}^{n_2/m_2}$.
- **Trenza:** Trenza tubular $\to (n_1, m_1)$. Trenza interior $\to (n_2, m_2)$.

**Ejemplo:** $y = x^{1/3} + x^{3/2} \to \{(1,3), (9,2)\}$.



Conjugando la trenza conseguimos que todos los cruces negros estén dentro de un tubo rojo.

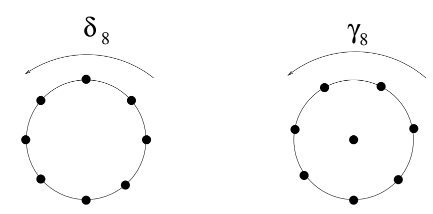
**Teorema:** Una trenza asociada a la singularidad con pares $\{(n_1, m_1), \ldots, (n_r, m_r)\}$ es la trenza tubular asociada a la singularidad con un par $(n_1, m_1)$ con trenza interior la asociada a la singularidad con pares $\{(n_2, m_2), \ldots, (n_r, m_r)\}$.

Disponemos de una descripción para el caso reducible, también recursiva, pero hace falta un estudio mucho más delicado ya que el invariante de Puiseux asociado a estas singularidades es un árbol que incluye los pares de cada componente y que muestra "cómo se separa" cada componente de las demás.

## Clasificación de Nielsen-Thurston para trenzas algebraicas.

Comencemos exponiendo los elementos de la teoría de Nielsen-Thurston de clasificación de grupos de homeomorfismos clase isotopía, pero aplicados ya al caso de trenzas:

- Una trenza $\alpha \in \mathbb{B}_n$ es *periódica* si es conjugada a una potencia de $\delta_n$ o $\gamma_n$. ($\delta_n$ son $n$ puntos girando $2\pi/n$. Y $\gamma_n$ son $n-1$ puntos girando $2\pi/n - 1$ alrededor de un punto central).




- Una trenza $\alpha \in \mathbb{B}_n$ es *reducible* si conserva salvo isotopía un sistema de curvas cerradas simples no triviales en el disco.
- Las trenzas que no son periódicas ni reducibles se denominan *pseudo-Asonov*.

**Teorema [Me1, Me2]:** Toda trenza reducible tiene una trenza conjugada "especial" que puede describirse por trenzas tubulares e interiores que es llamada *forma regular*.

**RESULTADO PRINCIPAL:** Las trenzas algebraicas (provienen de una singularidad) son periódicas o reducibles (nunca pseudo-Asonov) y cumplen la siguiente propiedad:

Si son reducibles su forma regular está compuesta por una trenza tubular periódica y las trenzas interiores son periódicas o reducibles, y cumplen esta misma propiedad. (Notar que en cada paso disminuye el número de hilos).

Además, dada la singularidad, somos capaces de dar la forma regular de cualquier trenza algebraica.

**Aplicación:** Es posible calcular algorítmicamente la forma regular de una trenza reducible y la potencia de $\delta_n$ o de $\gamma_n$ a la que es conjugada una trenza periódica. Así, dada una trenza algebraica $\alpha$, podemos calcular su forma regular. La trenza tubular es conjugada a una $\delta_n^k$ o a una $\gamma_n^k$. Este par de números $(k, n)$ nos proporciona información sobre la curva. Por ejemplo, si la trenza tubular de $\alpha$ es $\delta_n^k$, con $mcd(n,k) = 1$ entonces, $(k, n)$ es un par de Puiseux. Así, recorriendo la forma regular de $\alpha$ recuperamos los invariantes de Puiseux de la curva.

## referencias


[**Ar**] E. Artin Theory of Braids *Annals of Math.* **48** (1946), 93-114

[**Br**] E. Brieskorn, H. Knörrer Plane algebraic curves *Birkhäuser Verlag* (1986)

[**Me1**] J. González-Meneses, B. Wiest On the structure of the centralizer of a braid *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), 729-757

[**Me2**] J. González-Meneses The $n$ th root of a braid is unique upto conjugacy *Algebr. Geom. Topol.* **3** (2003), 1103-1118

[**Mi**] J. Milnor Singular points of complex hypersurfaces *Annals of Mathematics Studies, nº 61, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press* (1968)