

Introducción y enunciado

Introducción

Un mosaico aperiódico y repetitivo del plano define una laminación por planos, sin holonomía y transversalmente Cantor. Según [2] estos espacios son límites inversos de superficies ramificadas.

De hecho, R. Benedetti y J.M. Gambaudo prueban en [1] que cualquier \mathbb{G} -solenoides es también límite inverso de variedades ramificadas.

Aquí generalizamos estos resultados a laminaciones.

Enunciado del resultado

Sea (M, \mathcal{L}) una laminación minimal sin holonomía y transversalmente Cantor de un espacio compacto. Entonces (M, \mathcal{L}) es límite inverso de variedades ramificadas.

Esquema de la prueba

Un atlas con buenas propiedades

Fijada una métrica de Riemann completa sobre las hojas:

LEMA. Existe $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i\}_i$ un atlas foliado finito t.q.

A1. $\forall p \in M$, $\text{Star}(p) = \bigcup \{placa P \ni p\}$ está contenido en un convexo geodésico

A2. los bordes de las placas se intersecan transversalmente

A3. una placa de U_i corta a lo sumo a una placa de U_j \square

A2 y A3 \Rightarrow las transformaciones de holonomía

$h_{i,j} : x \in T_i \mapsto y \in T_j$ tq. la placa por y interseca a la de x

son homeomorfismos entre abiertos cerrados de T_i y T_j .

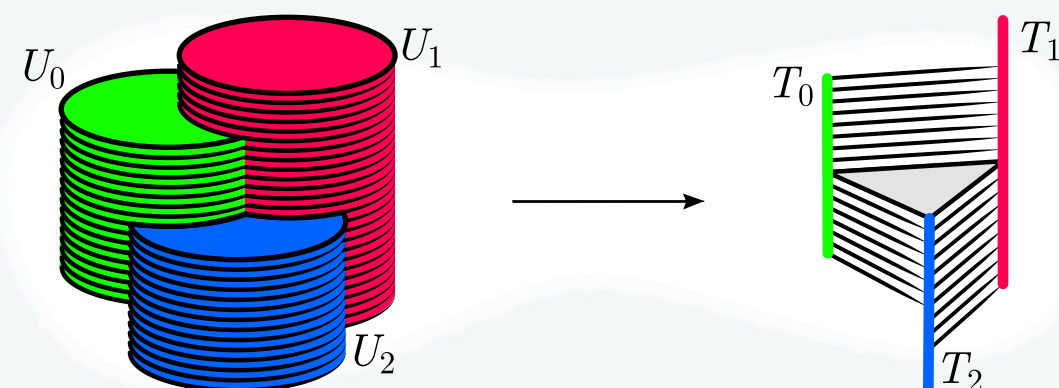
El nervio del atlas foliado \mathcal{A}

El nervio foliado de \mathcal{A} es la versión foliada de la noción clásica:

$\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ es un espacio foliado por complejos simpliciales que contiene información combinatoria de \mathcal{A} : si $U_0, U_1, \dots, U_n \in \mathcal{A}$

$$[U_0, \dots, U_n] \times T \subset \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \iff \bigcap_{i=0}^n U_i \neq \emptyset \text{ y } T \subset \bigcap_{i=1}^n \text{dom } h_{0,i},$$

con $[U_0, \dots, U_n]$ un n -símplejo abstracto.

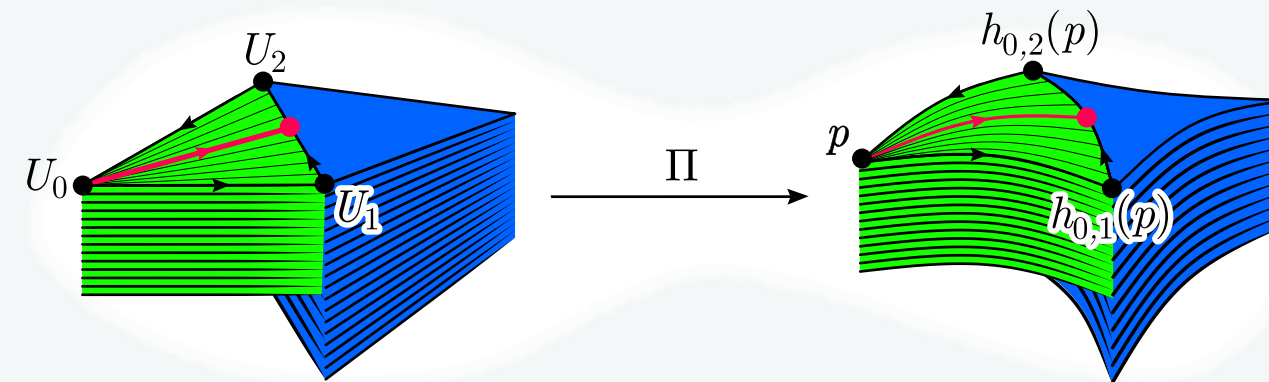


Del nervio a una descomposición en prismas

Definimos una aplicación foliada sobreyectiva $\Pi : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$:

- 0-símplices: $\Pi([U_i] \times \{p\}) = p$
- 1-símplices: A1 implica que $\exists! \gamma : [0, 1] \rightarrow L_p$ geodésica minimizante con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = h_{0,1}(p)$.
 $\Pi : [U_0, U_1] \times \{p\} \rightarrow M$ es γ
- n -símplices:

Π envía las rectas desde U_0 sobre geodésicas desde p



$$\mathcal{B} = \left\{ \Pi([U_0, \dots, U_{\dim \mathcal{L}}] \times \bigcap_i \text{dom } h_{0,i}) \mid U_i \in \mathcal{A} \right\}$$

es una descomposición de (M, \mathcal{L}) en prismas que se intersecan cara con cara

El cambio de coordenadas entre B y $B' \in \mathcal{B}$ se escribe como

$$\varphi_{B'} \circ \varphi_B^{-1}(x_B, y_B) = (x_{B'}(x_B), y_{B'}(y_B)),$$

i.e.

las transversales de B y B' coinciden

B1

Engordando prismas

LEMA DE INFLACIÓN. Dada una descomposición en prismas \mathcal{B} , existe otra \mathcal{B}' obtenida por **inflación** de \mathcal{B} , i.e.

- I1. $\partial B' \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \partial B$ para cada $B' \in \mathcal{B}'$
- I2. las transversales de \mathcal{B}' con abiertas cerradas en las transversales de \mathcal{B}
- I3. las placas de \mathcal{B}' son unión de placas de \mathcal{B} y el interior de cada placa de \mathcal{B}' contiene una placa de \mathcal{B} .

Prueba. • Fijamos una hoja $L \in M$ y su intersección $D = L \cap T_B$ con la transversal completa $T_B = \bigsqcup_{B \in \mathcal{B}} T_B$.

• Tomamos $T' \subset T_B$ suficientemente pequeño para que $\forall y \in D'$, $P_y = \bigcup \{placa \text{ por } x \in D \mid d(x, y) = d(x, D')\}$ contenga una placa en su interior.

• P_y se levanta en un entorno de y . \square

COROLARIO. El espacio foliado M admite una sucesión de descomposiciones \mathcal{B}_i , cada una inflada de la anterior, tal que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.

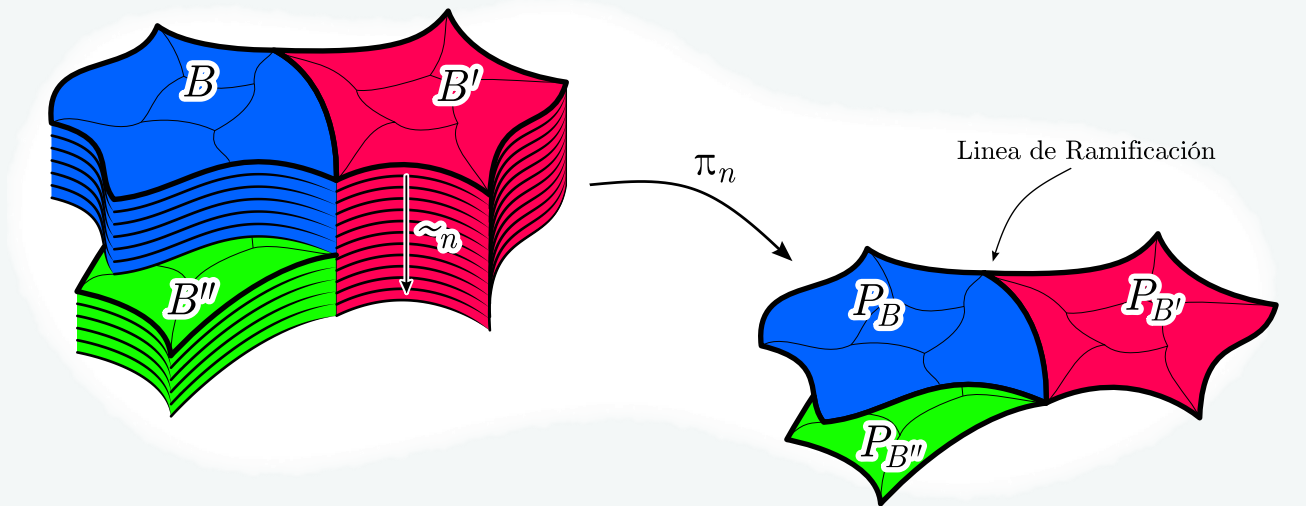
Colapsando prismas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la relación sobre M :

$$x \sim_n y \iff x \text{ e } y \text{ están en la misma transversal de } B \in \mathcal{B}_n$$

$$\iff \exists B \in \mathcal{B}_n : p_2(\varphi_B(x)) = p_2(\varphi_B(y)) \in T_B$$

$S_n = M / \sim_n$ es una variedad ramificada



Sistema proyectivo

I3 asegura que existe una sobreyección celular natural

$$f_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$$

B1 e I2 dicen que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M & & & & & & \\ \pi_1 \downarrow & \searrow \pi_2 & \searrow \pi_3 & \searrow \pi_n & & & \\ S_1 & \xleftarrow{f_2} & S_2 & \xleftarrow{f_3} & S_3 & \cdots & S_n \end{array}$$

Luego existe

$$\pi_\infty : M \rightarrow S_\infty = \varprojlim (S_n, f_n)$$

π_n sobreyectiva $\Rightarrow \pi_\infty(M)$ denso en S_∞
 M compacto y S_∞ Hausdorff $\Rightarrow \pi_\infty$ sobreyectiva

$\nexists x, y \in M \mid x \sim_n y \forall n \Rightarrow \pi_\infty$ inyectiva

π_∞ es continua y biyectiva entre un compacto y un Hausdorff:

π_∞ es un homeomorfismo

QED

Referencias

- [1] R. Benedetti y J.-M. Gambaudo. On the dynamics of \mathbb{G} -solenoids. applications to Delone sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3):673–691, 2003.
- [2] J. Bellissard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labelling. *Comm. Math. Phys.*, 261(1):1–41, 2006.
- [3] R. F. Williams. Expanding attractors. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.*, 43:169–203, 1974.