Opéradas coloreadas y localización de álgebras

JAVIER J. GUTIÉRREZ*
Centre de Recerca Matemàtica
* trabajo conjunto con C. Casacuberta, I. Moerdijk y R. M. Vogt

XIV Encuentro de Topología
Granada, 2 y 3 de noviembre de 2007

1. Introducción y motivación

Una de las características de los funtores de localización es la propiedad de preservar muchos tipos de estructuras algebraicas y homotópicas. Así, por ejemplo, en la categoría de espacios topológicos o conjuntos simpliciales, las f-localizaciones conservan la clase de los espacios siguientes:

- H-espacios homotópicamente asociativos;
- Espacios de lazos y espacios de lazos infinitos;
- GEMs (productos de espacios de Eilenberg-Mac Lane).

En la categoría homotópica estable, las f-localizaciones que conmutan con la suspensión conservan:

- Espectros anillo homotópicos;
- Espectros módulo homotópicos.

Todas las estructuras de los ejemplos anteriores comparten la propiedad común de que pueden ser formuladas en términos de álgebras sobre opéradas u opéradas coloreadas. En este trabajo estudiamos bajo qué condiciones las localizaciones homotópicas conservan álgebras sobre opéradas en categorías de modelos monoidales.

2. Opéradas coloreadas y álgebras

Sea $\mathcal{E} = (\mathcal{E}, \otimes, I, \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}})$ una categoría monoidal simétrica y cerrada. Denotaremos por Σ_n el grupo simétrico de n elementos y sea C un conjunto cuyos elementos llamaremos colores.

Una opérada C-coloreada P en $\mathcal{E}$ está formada por un conjunto de objetos $P(c_1,\dots,c_n;c)$ de $\mathcal{E}$ para cada $n>0$ junto con:

- Una acción por la derecha de Σ_n en cada $P(c_1,\dots,c_n;c)$, dada por aplicaciones

$$\sigma^* : P(c_1,\dots,c_n;c) \longrightarrow P(c_{\sigma(1)},\dots,c_{\sigma(n)};c)$$

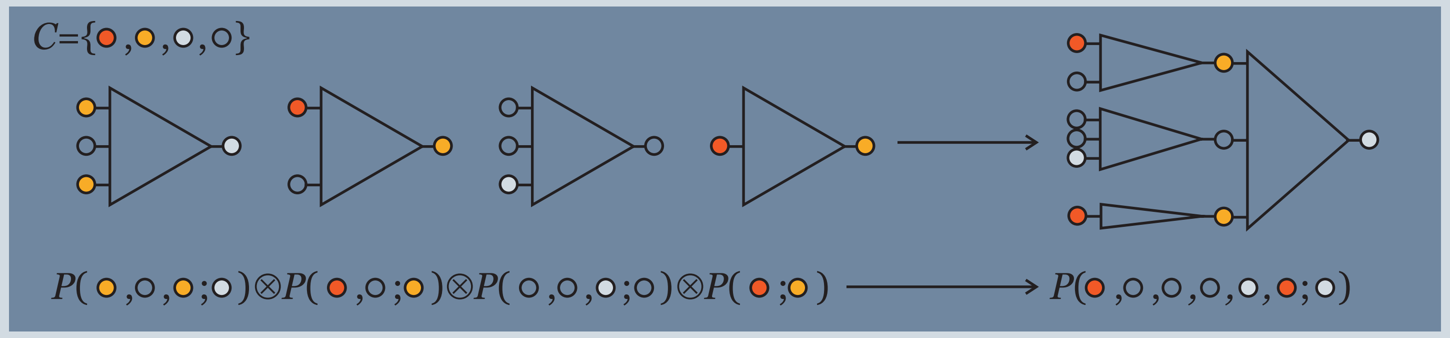
para cada σ de Σ_n.

- *Unidades*. Para cada color c de C, un morfismo $I \longrightarrow P(c;c)$
- *Producto de composición*. Para cada $(n+1)$-tupla de colores $(c_1,\dots,c_n;c)$ y n tuplas dadas $(a_{1,1},\dots,a_{1,k1};c_1),\dots,(a_{n,1},\dots,a_{n,kn};c_n)$ un morfismo

$$P(c_1,\dots,c_n;c)\otimes P(a_{1,1},\dots,a_{1,k1};c_1)\otimes\cdots\otimes P(a_{n,1},\dots,a_{n,kn};c_n) \longrightarrow P(a_{1,1},\dots,a_{1,k1},a_{2,1},\dots,a_{2,k2},\dots,a_{n,1},\dots,a_{n,kn};c)$$

compatible con la acción del grupo simétrico, las unidades y sujeto a condiciones de asociatividad.

Una opérada C-coloreada en $\mathcal{E}$ puede pensarse como una multicategoría enriquecida en $\mathcal{E}$, donde los conjuntos de morfismos tienen n entradas de colores $c_1,\dots,c_n$ y una salida de color c.



- Una opérada en sentido clásico es una opérada coloreada con un solo color.
- Una categoría pequeña C es una opérada coloreada en conjuntos, que denotamos por P_C, donde el conjunto de colores es el conjunto de objetos de C y las únicas operaciones son $P_C(A;B) = C(A,B)$, para cualesquiera objetos A y B de C.

- Sea $\mathcal{E}^C$ un producto de copias de la categoría $\mathcal{E}$ indizada por el conjunto C. Dado un objeto $\mathbf{X} = (X(c))_{c\in C}$ de $\mathcal{E}^C$, definimos la opérada C-coloreada de endomorfismos de $\mathbf{X}$ como

$$\mathrm{End}(\mathbf{X})(c_1,\dots,c_n;c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X(c_1)\otimes\cdots\otimes X(c_n);X(c)).$$

El producto de composición es la composición de morfismos habitual y la acción de Σ_n es por permutación de los factores.

Un álgebra sobre una opérada C-coloreada P es un objeto $\mathbf{X} = (X(c))_{c\in C}$ de $\mathcal{E}^C$ junto con un morfismo de opéradas $P \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{X})$.

- Sea $C = \{c\}$. La opérada $\mathcal{A}ss$ se define como $\mathcal{A}ss(c,\overset{(n)}{\dots},c;c) = I[\Sigma_n]$ para todo n, donde $I[\Sigma_n]$ es un coproducto de copias de la unidad I de $\mathcal{E}$ indizado por los elementos de n. Las álgebras sobre $\mathcal{A}ss$ son los monoides en $\mathcal{E}$. La opérada $\mathcal{C}om$ se define como $\mathcal{C}om(c,\overset{(n)}{\dots},c;c) = I$. Las álgebras sobre $\mathcal{C}om$ son los monoides conmutativos en $\mathcal{E}$.
- Sea $C = \{r,m\}$. Se define la opérada $\mathcal{M}od$ como una opérada C-coloreada cuyos únicos términos no nulos son $\mathcal{M}od(r,\overset{(n)}{\dots},r;r) = I[\Sigma_n]$ y $\mathcal{M}od(c_1,\dots,c_n;m) = I[\Sigma_n]$ cuando exactamente uno de los c_i es m y el resto son r. Un álgebra sobre $\mathcal{M}od$ es un par (R,M), donde R es un monoide y M es un R-bimódulo. Utilizando versiones no simétricas de esta opérada pueden obtenerse análogamente módulos por la izquierda o por la derecha.
- Sea P una opérada C-coloreada. Sea $D = \{0, 1\}\times C$ y definimos la opérada D-coloreada $\mathcal{M}or_P$ como

$$\mathcal{M}or_P((i_1,c_1),\dots,(i_n,c_n);(i,c)) = P(c_1,\dots,c_n;c) \text{ si } \max\{i_1,\dots,i_n\} \le i$$

y cero en el resto de los casos. Un álgebra sobre $\mathcal{M}or_P$ viene dada por un par de P-álgebras $\mathbf{X}_0 = (X(0,c))_{c\in C}$, $\mathbf{X}_1 = (X(1,c))_{c\in C}$ junto con una aplicación de P-álgebras $\mathbf{X}_0 \longrightarrow \mathbf{X}_1$ inducida por $\mathcal{M}or_P((0,c);(1,c))$.

- También existen opéradas coloreadas cuyas álgebras son R-álgebras, diagramas, categorías enriquecidas.

3. Categorías de modelos de opéradas

Una categoría de modelos es monoidal si es una categoría monoidal simétrica cerrada y satisface el axioma del producto-pushout: si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : U \longrightarrow V$ son dos cofibraciones, entonces el morfismo inducido

$$(X\otimes V)\coprod_{X\otimes U}(Y\otimes U) \longrightarrow Y\otimes V$$

es una cofibración, que además es una equivalencia débil si f o g lo son.

La categoría de espacios topológicos compactamente generados, conjuntos simpliciales y complejos de cadenas son categorías de modelos monoidales.

La categoría de opéradas C-coloreadas en una categoría de modelos monoidal $\mathcal{E}$ tiene estructura de categoría de modelos (Berger-Moerdijk). En esta estructura de modelos, un morfismo de opéradas C-coloreadas $P \longrightarrow Q$ es una equivalencia débil o una fibración si el morfismo $P(c_1,\dots,c_n;c) \longrightarrow Q(c_1,\dots,c_n;c)$ es una equivalencia débil o una fibración en $\mathcal{E}$ para cada $(c_1,\dots,c_n;c)$

4. Conservación de estructuras

Una categoría de modelos $\mathcal{E}$ es simplicial si está enriquecida, tensorizada y cotensorizada en conjuntos simpliciales, y cumple el axioma SM7 de Quillen, es decir, si $f : X \longrightarrow Y$ es una cofibración y $g : U \longrightarrow V$ es una fibración, entonces el morfismo inducido

$$\mathrm{Map}(Y,U) \longrightarrow \mathrm{Map}(Y,V)\times_{\mathrm{Map}(X,V)}\mathrm{Map}(X,U),$$

donde $\mathrm{Map}(-,-)$ denota el enriquecimiento simplicial, es una fibración, que además es una equivalencia débil si f o g lo son.

Una localización homotópica en una categoría de modelos simplicial $\mathcal{E}$ es un functor $L : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ que conserva equivalencias débiles y toma valores fibrantes, junto con una transformación natural $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \longrightarrow L$ tal que, para cada objeto X se cumple:

- η_{LX} y $L\eta_X$ son iguales en la categoría homotópica;
- $L\eta_X : LX \longrightarrow LLX$ es una equivalencia débil;
- $\eta_X : X \longrightarrow LX$ es una cofibración y el morfismo $\mathrm{Map}(LX, LY) \longrightarrow \mathrm{Map}(X, LY)$ es una equivalencia débil de conjuntos simpliciales para todo Y.

Ejemplos: Localizaciones en primos; localizaciones con respecto a teorías de homología; secciones de Postnikov; localizaciones con respecto a un conjunto de morfismos.

Teorema. Sea L una localización homotópica en una categoría de modelos simplicial y monoidal $\mathcal{E}$. Sea C un conjunto y P una opérada C-coloreada cofibrante con valores en conjuntos simpliciales. Sea $\mathbf{X} = (X(c))_{c\in C}$ una P-álgebra en $\mathcal{E}$ tal que $X(c)$ es cofibrante en $\mathcal{E}$ para cada $c\in C$. Si la clase de L-equivalencias es cerrada por productos tensoriales, entonces $L\mathbf{X}$ admite una única estructura de P-álgebra salvo homotopía tal que η_X es una aplicación de P-álgebras.

El teorema puede ser aplicado en las categorías de espacios topológicos compactamente generados, conjuntos simpliciales y espectros simétricos, entre otras. El mismo resultado se cumple también, olvidando todas las referencias a categorías de modelos y categorías simpliciales, en categorías monoidales simétricas cerradas, por ejemplo en la categoría de los grupos abelianos.

La siguiente tabla muestra, como aplicación del teorema anterior, algunos ejemplos de álgebras que se conservan por funtores de localización en diferentes categorías.

Categoría	Opérada	Álgebras
Grupos abelianos	$\mathcal{A}ss/\mathcal{C}om$ $\mathcal{M}od$ $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}ss}$ $\mathcal{M}or_{\mathcal{M}od}$	Anillos/Anillos conmutativos Módulos Morfismos de anillos Morfismos de módulos
Categoría homotópica inestable	$\mathcal{A}ss$	H-espacios
Categoría homotópica estable	$\mathcal{A}ss/\mathcal{C}om$ $\mathcal{M}od$ $\mathcal{M}or_{\mathcal{A}ss}$ $\mathcal{M}or_{\mathcal{M}od}$	Espectros anillo (conmutativos) homotópicos Espectros modulo homotópicos Morfismos de espectros anillo homotópicos Morfismos de espectros módulo homotópicos
Conjuntos simpliciales	A_∞/E_∞ $(\mathcal{M}or_{\mathcal{A}ss})_\infty$	Espacios de lazos, A_∞-espacios y E_∞-espacios Morfismos de espacios de lazos
Espectros simétricos	A_∞/E_∞ $\mathcal{M}od_\infty$ $(\mathcal{M}or_{\mathcal{A}ss})_\infty$ $(\mathcal{M}or_{\mathcal{M}od})_\infty$	Espectros anillo (conmutativos) estrictos Espectros módulo estrictos Morfismos de espectos anillo estrictos Morfismos de espectros módulo estrictos

Si P es una opérada C-coloreada, P_∞ denota un reemplazo cofibrante de P en la categoría de modelos de operadas C-coloreadas. Denotamos como A_∞ y E_∞ a $\mathcal{A}ss_\infty$ y $\mathcal{C}om_\infty$ respectivamente.

5. Referencias

- C. Berger y I. Moerdijk, Axiomatic homotopy theory for operads, *Comment. Math.Helv.* **78** (2003), no. 4, 805–831.
- C. Berger y I. Moerdijk, Resolution of coloured operads and rectification of homotopy algebras, *Contemp. Math.*, vol. 431, Amer. Math. Soc., Providence, (2007), 31–58.
- C. Casacuberta y J. J. Gutiérrez, Homotopical localization of module spectra, *Trans.Amer. Math. Soc.* **357** (2005), no. 7, 2753–2770
- A. D. Elmendorf y M. A. Mandell, Rings, modules, and algebras in infinite loop space theory, *Adv. Math.* **205** (2006), no. 1, 163–228.
- R. M. Vogt, Cofibrant operads and universal E_∞ operads, *Topology Appl.* **133** (2003), no. 1, 69–87.