Tomás Fernández Bayort*
C.G.A. (Centro de Gestión Avanzado)
Consejería de Educación, Junta de Andalucía (Sevilla)
e-mail: tfernandez@andaluciajunta.es

Sucesiones inversas de aplicaciones propias.

XIV Encuentro de Topología
Granada, Andalucía
2 y 3 de noviembre de 2007

1. Preliminares sobre finales

Este poster concierne al estudio de la conexión así como del espacio de finales de Freudenthal ([2] y [3]) de límites inversos de sucesiones de espacios no compactos cuyas aplicaciones de enlace son propias.

Nos restringiremos a la categoría de los espacios metrizables localmente compactos y σ-compactos (*espacios admisibles*, para acortar) y las aplicaciones propias. Recordemos que una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada subconjunto compacto $K \subset Y$. Es bien conocido que las aplicaciones propias entre espacios admisibles son aplicaciones cerradas ([1]; 3.7.18). Es una comprobación sencilla ver que la compacidad local y la σ-compacidad establecen la existencia de *sucesiones exhaustivas*; esto es, sucesiones crecientes de conjuntos compactos $K_n \subset X$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ y $K_n \subset int K_{n+1}$.

Para un espacio admisible general la definición de final de Freudenthal es la siguiente. Dado un espacio X denotamos por $\widehat{X}$ al conjunto de todos los ultrafiltros de X sobre la familia $\mathcal{A}$ de todos los conjuntos cerrados de X con frontera compacta. El espacio obtenido al dotar a $\widehat{X}$ de la topología generada por la base de cerrados

$$A^* = \{\mathcal{A} - \text{ultrafiltros } \mathfrak{U} \text{ con } A \in \mathfrak{U}\}$$

con $A \in \mathcal{A}$, es conocido como la *compactificación de Freudenthal* de X. Cada $x \in X$ es identificado con el $\mathcal{A}$-ultrafiltro $\mathfrak{U}_x = \{A \in \mathcal{A}; x \in A\}$ y la diferencia $\mathcal{F}(X) = \widehat{X} - X$ resulta ser un subespacio cerrado 0-dimensional cuyos elementos se conocen por los *finales de Freudenthal* de X ([4]). Además cualquier aplicación propia $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios admisibles induce una aplicación continua $f_* : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$. Si consideramos *continuos generalizados* (espacios admisibles conexos), los finales pueden describirse con una forma más sugerente desde un punto de vista geométrico como

$$\mathcal{F}(X) \cong \varprojlim Q(X - int K_n)$$

donde $Q(X - int K_n)$ es el espacio de cuasicomponentes de $X - int K_n$ y en particular, $\mathcal{F}(X)$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor.

En general, la compactificación de Freudenthal de un espacio admisible X puede no ser metrizable. De hecho, la metrizabilidad de $\widehat{X}$ y $\mathcal{F}(X)$ son equivalentes, y ambas son equivalentes a la compacidad del espacio de cuasicomponentes de X ([3]; Thm. VI). En particular, la compactificación de Freudenthal de un continuo generalizado es siempre un espacio metrizable y por tanto un continuo. Este hecho nos permite probar el siguiente

Lema 1.1. *Dada una sucesión exhaustiva $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de un continuo generalizado X, consideremos $\varepsilon = (Q_n)_{n\geq 1}$ un final de Freudenthal definido por la sucesión encajada de cuasicomponentes $Q_n \subset X - int K_n$. Para cada $n \geq 1$ existe un continuo $L \subset \widehat{X} - int K_n$ en la compactificación de Freudenthal $\widehat{X}$ uniendo ε y $Fr K_n$. Más aún, cada Q_n ($n \geq 1$) contiene al menos una componente conexa no compacta.*

La componente no acotada dada por el Lema 1.1 no tiene por qué ser única. La unicidad de estas componentes se tiene para los llamados *continuos generalizados de Peano*; esto es, los continuos generalizados localmente conexos. Para estos espacios las cuasicomponentes coinciden con las componentes conexas; en particular, los finales de Freudenthal están definidos por sucesiones crecientes de componentes conexas.

2. Límites inversos con aplicaciones de enlace propias

Con relación a los límites inversos, usaremos la notación $X = \varprojlim_p X_n$ para representar el límite inverso de una sucesión $X_0 \xleftarrow{f_0} X_1 \xleftarrow{f_1} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} \dots$ cuyas aplicaciones enlace f_n son propias. Notemos que X puede ser el espacio vacío (por ejemplo si consideramos la sucesión de inclusiones $X_0 \supset X_1 \supset \dots$ donde $X_n = [n, +\infty)$). Para límites inversos no vacíos tenemos el siguiente lema; compárese con ([1], 3.7.12).

Lema 2.1. *Supongamos que $X = \varprojlim_p X_n$ no es vacío. Entonces X es un espacio admisible. Más aún, las proyecciones naturales $\pi_n : X \to X_n$ son aplicaciones propias (y por tanto X no es compacto si los espacios X_n tampoco lo son). Además, si las aplicaciones f_n son monótonas entonces también lo son las proyecciones π_n.*

Recordemos que una aplicación $f : X \to Y$ se dice *monótona* si es una sobreyección continua tal que $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$. Es sabido (ver ([1]; 6.1.29)) que si f es una aplicación monótona cerrada entonces $f^{-1}(C)$ es conexo para cualquier espacio conexo $C \subset Y$.

Corolario 2.2. *Consideremos un límite inverso de continuos generalizados $X = \varprojlim_p X_n$ con aplicaciones enlace monótonas, entonces X es un continuo generalizado.*

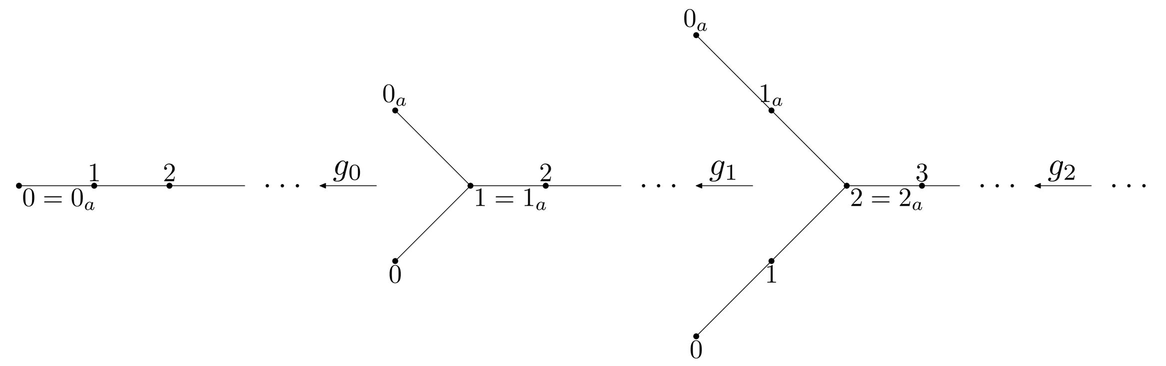
Proposición 2.3. *Sea X un espacio admisible, entonces $X = \varprojlim_p X_n$ si y sólo para la sucesión inducida $\{X_1^+ \leftarrow X_2^+ \leftarrow \dots\}$ se tiene $X^+ = \varprojlim X_n^+$.*

Que, aplicando ([5]; 2.36), tiene como consecuencia el siguiente

Corolario 2.4. *Si cada X_n es homeomorfo a un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$, entonces X se puede sumergir como un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{2k}$.*

3. Límites inversos que preservan los finales de Freudenthal

La compacidad es crucial, no sólo para la existencia de un límite inverso, sino también para la preservación de la conexión. Así un límite no vacío $X = \varprojlim_p X_n \neq \emptyset$ puede no ser conexo. Un ejemplo sencillo es la sucesión inversa de árboles con un solo final X_n cuyo bosquejo vemos en la siguiente figura, su límite consiste en dos copias de la semirecta euclídea $\mathbb{R}_+$.



Proposición 3.1. *Si los X_n son continuos generalizados entonces la aplicación canónica continua $\varphi : \widehat{X} \to \varprojlim \widehat{X_n}$ es sobreyectiva.*

Corolario 3.2. *Bajo las suposiciones anteriores, existe una aplicación sobreyectiva entre los finales de Freudenthal de $X = \varprojlim_p X_n$ y el límite inverso de espacios de finales de Freudenthal $\varprojlim \mathcal{F}(X_n)$.*

Proposición 3.3. *Sea $\{X_1 \xleftarrow{g_1} X_2 \xleftarrow{g_2} \dots\}$ una sucesión inversa de continuos generalizados tales que $\mathcal{F}(X_n) \cong \mathcal{F}(X_{n+1})$ y $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X_n)$ para todo n. Entonces X es conexo y por tanto un continuo generalizado.*

También se cumple el siguiente recíproco parcial de la Proposición anterior

Proposición 3.4. *Sea $X = \varprojlim_p D_i$ un límite inverso conexo por caminos obtenido de una sucesión de árboles localmente finitos (o, más generalmente, dendritas generalizadas) tales que $\mathcal{F}(D_n) \cong \mathcal{F}(D_{n+1})$ para todo n entonces $\mathcal{F}(D) \cong \mathcal{F}(D_n)$ para todo n.*

Además, si usamos la monotonía tenemos

Teorema 3.5. *Sea X el límite inverso de una sucesión $\{X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots\}$ de espacios admisibles donde las aplicaciones enlace son propias y monótonas. Entonces $\mathcal{F}(X_n) \cong \mathcal{F}(X_{n+1})$ y $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X_n)$ para todo n.*

4. Espacios tipo rayo

Seguidamente consideraremos el análogo propio de la bien conocida clase de los espacios tipo arco en la teoría del continuo. Concretamente, decimos que un espacio $X \neq \emptyset$ es un *espacio tipo rayo* si $X = \varprojlim_p X_n$ donde $X_n = \mathbb{R}_+$ es la semirecta euclídea para cada $n \geq 1$. Tenemos

Lema 4.1. *Sea X un espacio tipo rayo. Si F_1 y F_2 son dos subconjuntos cerrados, conexos y no compacto en X, entonces $F_1 \subset F_2$ o $F_2 \subset F_1$.*

Este lema es utilizado en la prueba de

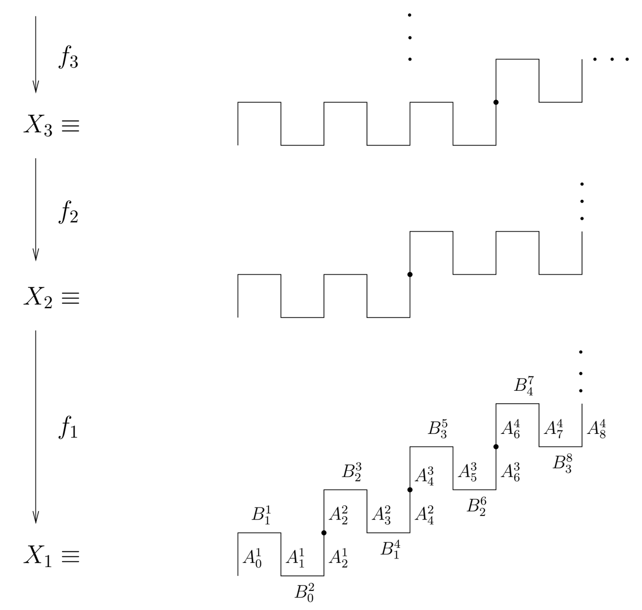
Teorema 4.2. *Cualquier espacio tipo rayo X es un continuo generalizado de un solo final.*

Es bien sabido que la clase de los espacios tipo arco contiene un objeto universal (ver [6]). En contraste, la clase de los espacios tipo rayo no admite un espacio universal. Recordemos que un espacio U se dice que es *universal* en una categoría topológica $\mathcal{C}$ si cualquier espacio de $\mathcal{C}$ se puede sumergir en U.

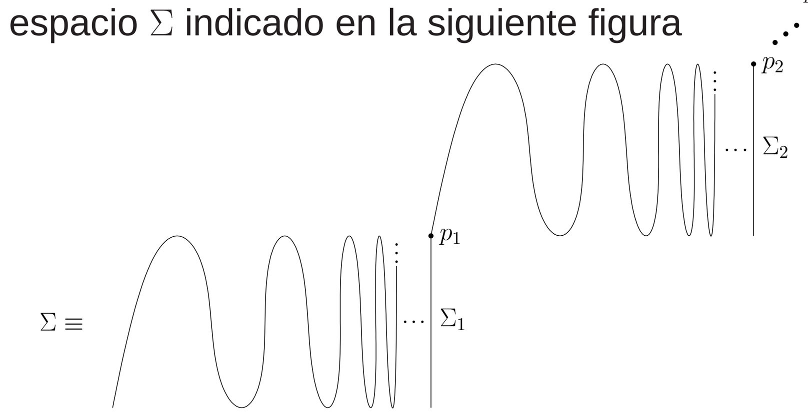
Teorema 4.3. *No existe un espacio universal en la categoría $\mathcal{R}$ de los espacios tipo rayo y las aplicaciones propias.*

La demostración consiste en verificar que el siguiente el siguiente ejemplo de un espacio tipo rayo no puede ser sumergido en un espacio tipo rayo que contenga una copia de la semirecta $\mathbb{R}_+$.

Ejemplo 4.4. Consideramos la familia de segmentos unidad en la red plana formada por cuadrados unitarios dados por $A_i^j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = i, j-1 \leq y \leq j\}$ y $B_j^i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = j, i-1 \leq x \leq i\}$. Sea X_n el rayo en la red plana obtenido enlazando los segmentos de la unión $\cup\{A_i^j : 1 \leq j < +\infty, 2nj - 2n \leq i \leq 2nj\}$ con segmentos horizontales B_j^i; ver la figura adjunta



Las aplicaciones enlace propias f_n vienen dadas por las retracciones de X_{n+1} sobre X_n que llevan el segmento $A_i^j \subset X_{n+1}$ sobre $A^j_{min\{i-2nj-2n, 2nj\}}$. Entonces se puede probar que $X = \varprojlim_p X_p$ es homeomorfo al espacio Σ indicado en la siguiente figura



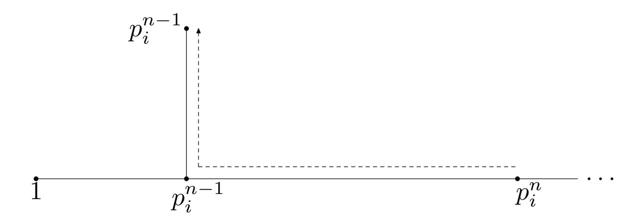
5. Espacios tipo árbol y cuestiones abiertas

Como una extensión de los espacios tipo rayo, se puede definir un *espacio tipo T* como un límite no vacío $X = \varprojlim_p X_n$ de una sucesión preservando los finales (i.e. $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(T)$), donde cada $X_n = T$ es un árbol localmente finito T para todo $n \geq 1$. Para $T = \mathbb{R}$ la línea euclídea, el Teorema 4.2 se extiende para los espacios tipo $\mathbb{R}$. Concretamente,

Teorema 5.1. *Cualquier espacio X tipo $\mathbb{R}$ es un continuo generalizado con dos finales.*

Ejemplos sencillos nos muestran que el resultado anterior sobre espacios tipo $\mathbb{R}_+$ y tipo $\mathbb{R}$ no se cumple para otro árboles. En concreto, un espacio X tipo T, con T un árbol con un solo final, puede no preservar los finales y ser no conexo como muestra el ejemplo al principio de la Sección §3. Se puede adaptar el mismo ejemplo para $\mathbb{R}$ y así encontrar un espacio Y tipo T (que ahora resultará ser dos copias disjuntas de $\mathbb{R}$) donde T es un árbol sin vértices finales que no preserva los finales y no es conexo. Más aún, el Ejemplo 5.2 muestra que el espacio de finales de X puede incluso no ser metrizable.

Ejemplo 5.2. Sea $\{p_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de números primos dónde $p_1 = 2$ y consideremos la sucesión inversa formada por los conjuntos cerrados euclídeos $X_n = ([1, +\infty) \times \{0\}) \cup \{\{p_i^n\} \times [0, p_i^n]\}_{i\geq 0}$ ($n \geq 1$) y las aplicaciones enlace propias $f_n : X_{n+1} \to X_n$ definidas como sigue:



La línea de puntos en la figura de arriba describe la imagen en X_{n-1} del segmento $\{p_i^n\} \times [0, p_i^n] \subset X_n$ por la aplicación f_{n-1}. No es difícil comprobar que $X = \varprojlim_p X_n \cong [1, +\infty) \sqcup (\sqcup_{i\geq 1}[p_i, +\infty))$, y entonces $\mathcal{F}(X)$ no puede ser metrizable por ([3]; Thm. VI).

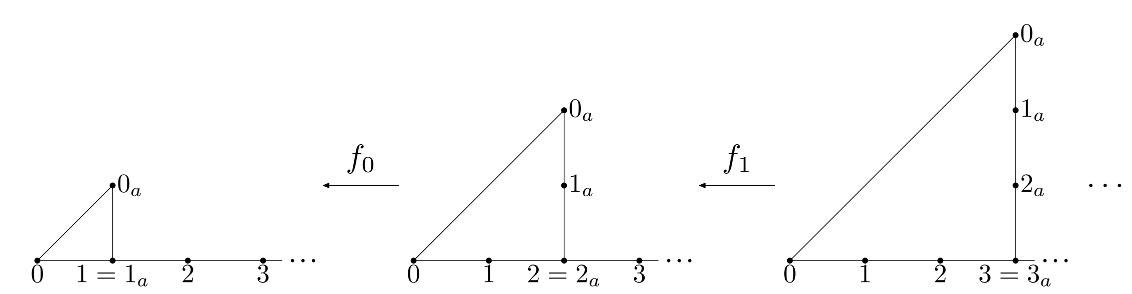
Esto nos sugiere la siguiente cuestión

CUESTIÓN A: Supongamos que $X = \varprojlim_p T_n$ es el límite de árboles con un número finito de puntos de ramificación. ¿Es el espacio de finales de X metrizable?

Como una consecuencia de la Proposición 3.3, Si X es un espacio tipo T tal que preserva los finales entonces X es conexo. Pero todavía no tenemos una respuesta positiva o un contraejemplo para el recíproco; concretamente,

CUESTIÓN B: ¿Preserva los finales cualquier espacio conexo tipo T?

Un respuesta positiva parcial se dio en la Proposición 3.4. También el siguiente ejemplo sencillo nos muestra que para un grafo G localmente finito y de un solo final existen espacios conexos tipo G que no preservan los finales. Por ejemplo, la recta euclídea $\mathbb{R}$ es el límite inverso de la siguiente sucesión de grafos de un solo final.



Referencias

[1] R. Engelking. General Topology. Sigma Ser. Pure Math., Vol. VI Heldermann Verlag, 1989.

[2] H. Freudenthal. Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen. Indag. Math. **13** (1951), 184-192.

[3] H. Freudenthal. Neuaufbau der Endentheorie. Annals of Math. **43** (1942), 261-279.

[4] C. H. Houghton. Ends of locally compact groups and their coset spaces. J. Aust. Math. Soc. **17** (1974), 274-284.

[5] S. B. Nadler. Continuum Theory. Marcel Dekker, Inc., New York 1992.

[6] R. M. Schori. A universal snake-like continuum. Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1313-1316.

* Los resultados presentados han sido obtenidos en colaboración con A. Quintero.