

# FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA



Universidad de Granada  
Departamento de Electrónica y Tecnología  
de Computadores

## Ingeniería Informática Examen Febrero 2008

Duración: 3 horas

Responda a cada pregunta en hojas separadas. Indique en cada hoja su nombre, el número de página y el número de páginas totales que entrega.

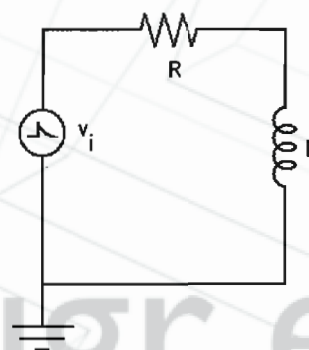
Lea detenidamente los enunciados antes de contestar

Nombre \_\_\_\_\_ D.N.I. \_\_\_\_\_ Grupo \_\_\_\_\_

1. En el circuito RL de la figura introducimos en la entrada una señal de tipo exponencial decreciente,  $v_i(t) = e^{-t}$  V. Sabiendo que la transformada de Laplace de la corriente que circula por la malla es:

$I(s) = \frac{1}{1+s} \times \frac{1}{R+sL}$ , calcula la corriente que recorre el circuito en cada instante de tiempo.

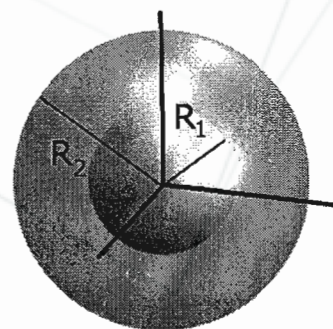
- Calcula la corriente que sigue circulando en el circuito tras el periodo transitorio (calcula el límite de la corriente cuando  $t \rightarrow \infty$ ).



Datos:  $R = 1000 \Omega$ ;  $L = 500$  H;  $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$ ; (0.75 puntos)

2. El potencial creado por dos esferas conductoras concéntricas de radios  $R_1 = 1$  cm y  $R_2 = 2$  cm separadas por el vacío y cargadas con  $Q$  y  $-Q$  respectivamente es:

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}; & r \leq R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}; & R_1 < r < R_2 \\ 0; & r \geq R_2 \end{cases}$$

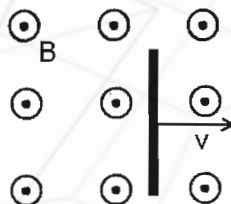


- a) Calcula a partir del mismo el campo eléctrico creado por la estructura en cualquier punto del espacio (ten en cuenta el carácter vectorial del campo). (0.75 puntos)
- b) Calcula a partir del potencial la capacidad del condensador esférico descrito. (0.75 puntos)

Datos:  $\epsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

Nabla: (cartesianas)  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ ; (esféricas)  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$

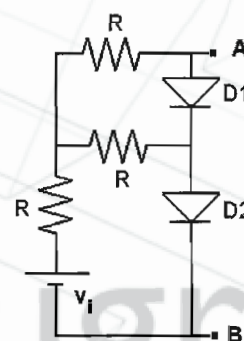
3. Desplazamos una barra conductora perpendicularmente a un campo magnético tal y como muestra la figura (el campo magnético sale del papel). Razona cómo se distribuyen las cargas positivas y negativas en la misma. **(0.75 puntos)**



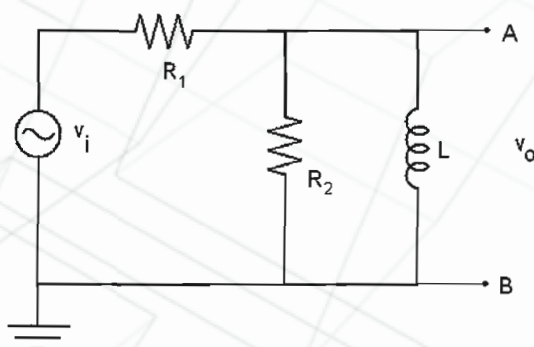
4. Calcula la característica de transferencia del siguiente circuito para tensiones de entrada positivas ( $v_0 = V_A - V_B$ ) **(1.5 puntos)**

- Calcula la potencia que disipa cada diodo si  $v_i$  vale 1 V. **(0.5 puntos)**

Datos:  $V_\gamma = 0.6 V$  (Válido para los dos diodos)



5. Para el circuito de la figura ( $R_1=200 \Omega$ ;  $R_2=200 \Omega$ ;  $L=10 \text{ mH}$ )



- Obtenga la función de transferencia  $T(s)=V_0(s)/V_i(s)$ . **(1 punto)**
- Represente el diagrama de Bode en amplitud y fase para dicha función de transferencia. **(2 puntos)**
- Usando la función de transferencia obtenida, calcule  $v_0(t)$  si  $v_i(t)=[4\cos(10t)+4\cos(10^4t)] V$ . **(1 punto)**
- Calcula el equivalente de Thevenin de todo el circuito visto entre los terminales A y B para una tensión de entrada general  $v_i$ . **(1 punto)**

## Examen de febrero 2008

1.-



$$R = 1000 \, \Omega$$

$$L = 500 \, \text{H}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$I(s) = \frac{1}{1+s} \times \frac{1}{R+sL}$$

Conociendo la transformada de Laplace de la corriente que va por el circuito, lo que hay que hacer es calcular la transformada inversa y así obtenemos  $i(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL}\right]$$

Descomponemos  $\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL}$  en una suma de términos más sencillos

$$\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{R+sL} = \frac{A(R+sL) + B(1+s)}{(1+s)(R+sL)}$$

Por tanto:

$$1 = A(R+sL) + B(1+s)$$

$$\text{Si } s=0 \rightarrow 1 = AR + B \rightsquigarrow B = 1 - AR$$

$$\text{Si } s=-1 \rightarrow 1 = A(R-L) \rightsquigarrow A = \frac{1}{R-L}$$

$$\left\{ \begin{aligned} B &= 1 - \frac{R}{R-L} = \frac{-L}{R-L} \end{aligned} \right.$$

Por consiguiente  $A = \frac{1}{500}$

$$B = -1$$

$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{R+sL} = \frac{1}{500} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1000 + 500s} = \frac{1}{500} \frac{1}{1+s} - \frac{1}{500} \frac{1}{2+s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{1}{500} e^{-t} - \frac{1}{500} e^{-2t} = i(t)$$

Si calculamos  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{500} [e^{-t} - e^{-2t}] = 0$

fmgomez@ugr.es



2.-

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} & ; r \leq R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} & ; R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & ; r \geq R_2 \end{cases}$$

a) La relación entre el campo y el potencial es

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Por tanto, hay que aplicar regla sobre  $V$

si  $r \leq R_1 \rightarrow V = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}}_{\text{constante}}, -\nabla V = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

si  $r \geq R_2 \rightarrow V = \underbrace{0}_{\text{constante}}, -\nabla V = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

si  $R_1 < r < R_2 \rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}}_{\text{constante}}$

$$-\nabla V = -\left[ \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \right]$$

$$\begin{aligned} -\nabla V &= -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right] \hat{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \vec{E} \end{aligned}$$

$V$  no depende de  $\theta$  y  $\phi$   
Derivadas igual a cero

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

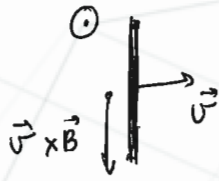
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{si } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } R_2 < r \end{cases}$$

$$b) \quad C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(r=R_1) - V(r=R_2)} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} - 0}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.02}} = 2.22 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

fmgomez@ugr.es

3.-



Según la ley de fuerzas de Lorentz,  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ .

Ya que  $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{v} \times \vec{B}$  es un vector que apunta hacia abajo, tal y como se muestra

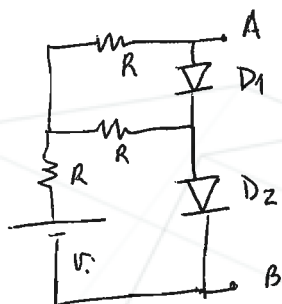
Fuerza sobre cargas positivas  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$  dirección y sentido de  $\vec{v} \times \vec{B}$

Fuerza sobre cargas negativas  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$  dirección de  $\vec{v} \times \vec{B}$ ; sentido contrario  
negativa



Distribución de cargas

4.-



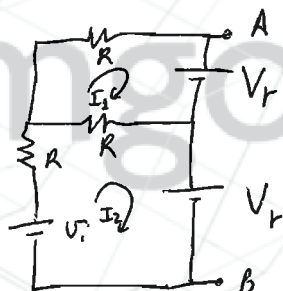
En principio hay cuatro casos posibles

- |        |        |
|--------|--------|
| D1 ON  | D2 ON  |
| D1 ON  | D2 OFF |
| D1 OFF | D2 ON  |
| D1 OFF | D2 OFF |

Vamos a resolverlos todos, y veremos cuándo se da cada uno.

~~~~~

D1 ON D2 ON



$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ malla: } & -V_r = 2RI_1 - RI_2 \\ 2^{\text{a}} \text{ malla: } & V_i - V_r = 2RI_2 - RI_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ malla: } \\ 2^{\text{a}} \text{ malla: } \end{aligned}} \right\}$$

$$I_2 = \frac{2RI_1 + V_r}{R}$$

$$V_i - V_r = 2[2RI_1 + V_r] - RI_1$$

$$V_i - V_r = 4RI_1 + 2V_r - RI_1$$

$$V_i - 3V_r = 3RI_1 \rightarrow I_1 = \frac{V_i - 3V_r}{3R}$$

$$I_2 = \frac{\frac{2}{3}(V_i - 3V_r) + V_r}{R} = \frac{\frac{2}{3}V_i - 2V_r + V_r}{R}$$

$$I_2 = \frac{\frac{2}{3}V_i - V_r}{R}$$

Si los diodos conducen, los sentidos de las corrientes han de ser positivos

$$I_1 = \frac{V_i - 3V_r}{3R} > 0 \rightarrow V_i > 3V_r$$

$$I_2 = \frac{\frac{2}{3}V_i - V_r}{R} > 0 \rightarrow V_i > \frac{3}{2}V_r$$

$V_i > 3V_r$  cumple ambas condiciones  
D1 y D2 ON si  $V_i > 3V_r$

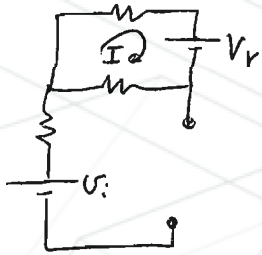


En ese caso  $V_o = 2V_r$

$$V_o = 1.2V \text{ si } V_i > 1.8V$$

~~~~~

D1 ON D2 OFF

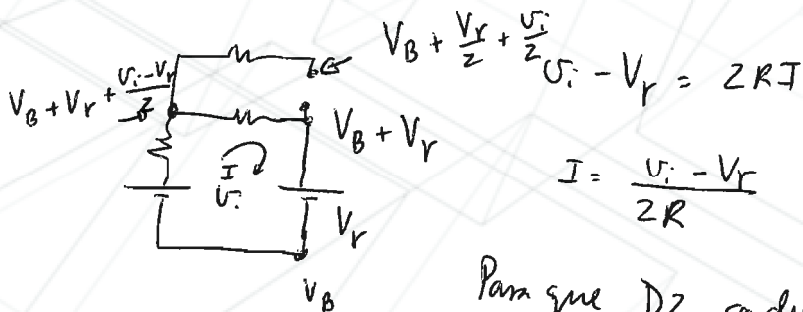


Malla 1:  $-V_r = 2RI \rightarrow I = -\frac{V_r}{2R}$

Si se diera esta configuración  $I$  sería negativa  
Es imposible

~~~~~

D1 OFF D2 ON



$$V_B + \frac{V_r}{2} + \frac{V_i}{2} - V_r = 2RI$$

$$I = \frac{V_i - V_r}{2R}$$

Para que D2 conduzca,  $I > 0 \rightarrow \frac{V_i - V_r}{2R} > 0 \rightarrow V_i > V_r$

Para que D1 no conduzca, la caída de tensión entre su lado p y n ha de ser menor que 0.6

Tensión en su lado n:  $V_B + V_r$

Tensión en su lado p:  $V_B + \frac{V_r}{2} + \frac{V_i}{2}$

$$\Delta V = \frac{V_i}{2} - \frac{V_r}{2} < V_r \rightarrow \frac{V_i}{2} < \frac{3V_r}{2}$$

Para que D1 no conduzca  $V_i$  ha de ser menor que  $3V_r$   
" " D2 conduzca  $V_i$  ha de ser mayor que  $V_r$

En estas condiciones  $V_A = \frac{V_i}{2} + \frac{V_r}{2} + V_B$

$$V_B = V_B$$

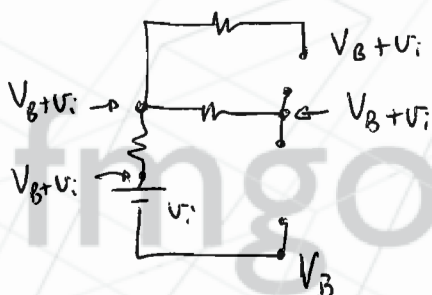
$$V_o = V_A - V_B = \frac{V_i}{2} + \frac{V_r}{2}$$

Por tanto

$$V_o = \frac{V_i}{2} + 0.3 \quad \text{si} \quad V_i > 0.6V \quad \text{y} \quad V_i < 1.8V$$

~~~~~

Último estado: D1 OFF D2 OFF



D1 claramente está cortado, porque su lado p está a igual tensión que su lado n.

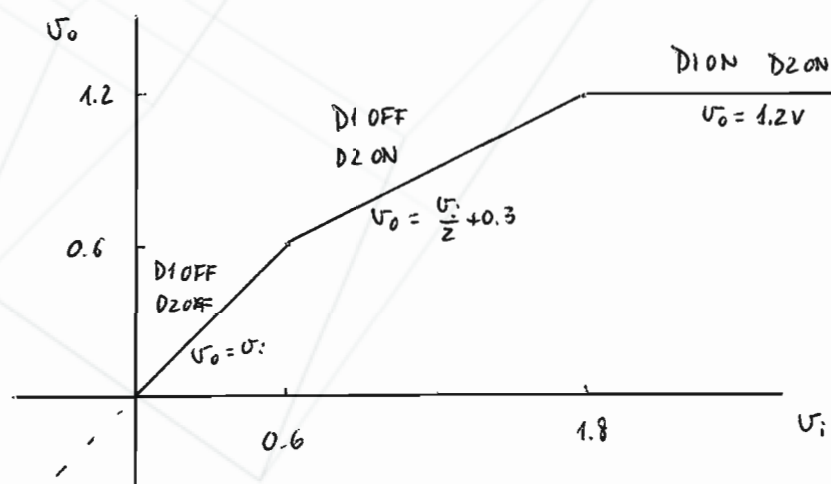
Para que D2 esté cortado  $V_i + V_B - V_B$  ha de ser menor que  $V_r \rightarrow \boxed{V_i < V_r}$

$$V_A = V_B + V_i$$

$$V_B = V_B$$

$$V_o = V_A - V_B = V_i$$

$$V_o = V_i \quad \text{si} \quad V_i < 0.6V$$



Potencia consumida por los diodos

D1: Cuando  $V_i = 1V$ , D1 OFF

$$[P = V \cdot I = V \cdot 0 = 0]$$

D2: Cuando  $V_i = 1V$ , D2 ON

$$P = V \cdot I = V_r \cdot I = V_r \cdot \frac{V_i - 0.6}{2} = 0.6 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.12 \text{ mW}}}$$

$$R = 1k\Omega$$

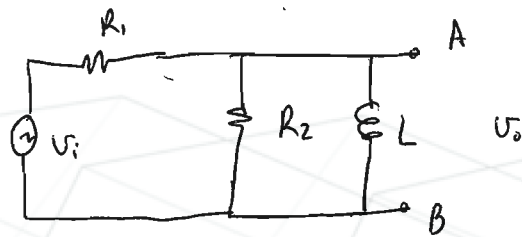
$$V_r = 0.6$$

$$\frac{V_i - 0.6}{2}$$

Ver primera parte del problema

fmgomez@ugr.es

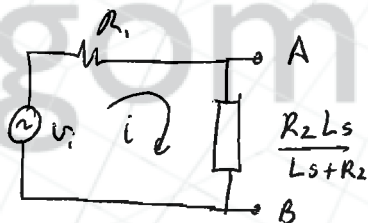
S.-



a) Podemos asociar  $R_2$  y  $L$  sin perder los puntos A y B.  
Están en paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} = \frac{Ls + R_2}{R_2 Ls}$$

$$Z_{eq} = \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}$$



$$U_i = R_1 i + \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2} i$$

$$i = \frac{U_i}{R_1 + \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}}$$

$$U_o = i \cdot Z_{eq} = \frac{U_i}{R_1 + \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}} \cdot \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}$$

$$U_o = \frac{U_i L R_2 s}{R_1 Ls + R_2 R_1 + R_2 Ls} = \frac{U_i L R_2 s}{R_1 R_2 + (R_1 L + R_2 L)s}$$

$$\boxed{T(s)} = \frac{U_o}{U_i} = \frac{R_2 L s}{R_1 R_2 + (R_1 L + R_2 L)s} = \frac{2s}{4 \cdot 10^4 + 4s} = \boxed{\frac{s}{2 \cdot 10^4 + 2s}}$$

$$\left. \begin{aligned} R_2 L &= 200 \cdot 10^{-2} = 2 \\ R_1 R_2 &= 200 \cdot 200 = 4 \cdot 10^4 \\ (R_1 + R_2)L &= 400 \cdot 10^{-2} = 4 \end{aligned} \right\}$$

$U_o$  es la caída de tensión en  $Z_{eq}$

$$c) \quad v_i(t) = \underbrace{4 \cos(10t)}_{4e^{j0}} + \underbrace{4 \cos(10^4 t)}_{4e^{j0}}$$

→ Primer término:  $\omega = 10 \text{ rad/s}$

$$|T(\omega=10)| = \frac{\frac{10}{2 \cdot 10^4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{10^4}\right)^2}} \approx \frac{\frac{1}{2 \cdot 10^3}}{1} = \frac{1}{2 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\arg T(\omega=10) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{10}{10^4}\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

$$|v_0| = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 20 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\arg v_0 = \frac{\pi}{2}$$

→ Segundo término:  $\omega = 10^4$

$$|T(\omega=10^4)| = \frac{\frac{10^4}{2 \cdot 10^4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{10^4}{10^4}\right)^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\arg T(\omega=10^4) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{10^4}{10^4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

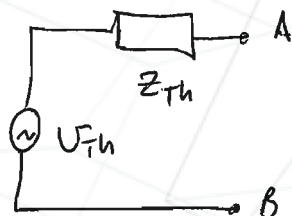
$$|v_0| = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\arg v_0 = \frac{\pi}{4}$$

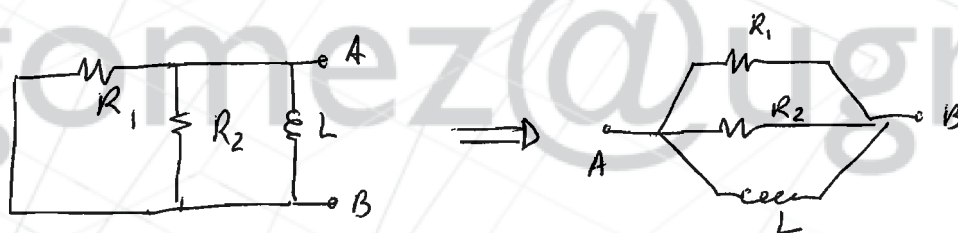
$$v_0(t) = 2 \cdot 10^{-3} \cos(10t + \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(10^4 t + \frac{\pi}{4})$$



d) Según el teorema de Thevenin el circuito visto desde A y B  
Se puede sustituir por



Calculamos  $Z_{Th}$ . ~~Por~~ Anulamos las fuentes y vemos la  $Z_{eq}$  entre A y B



$$\frac{1}{Z_{Th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{10^{-2}s} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10^{-2}s} = \frac{100 + 10^{-2}s}{s}$$

$$\boxed{Z_{Th} = \frac{s}{100 + 10^{-2}s} = \frac{j\omega}{100 + 10^{-2}j\omega}}$$

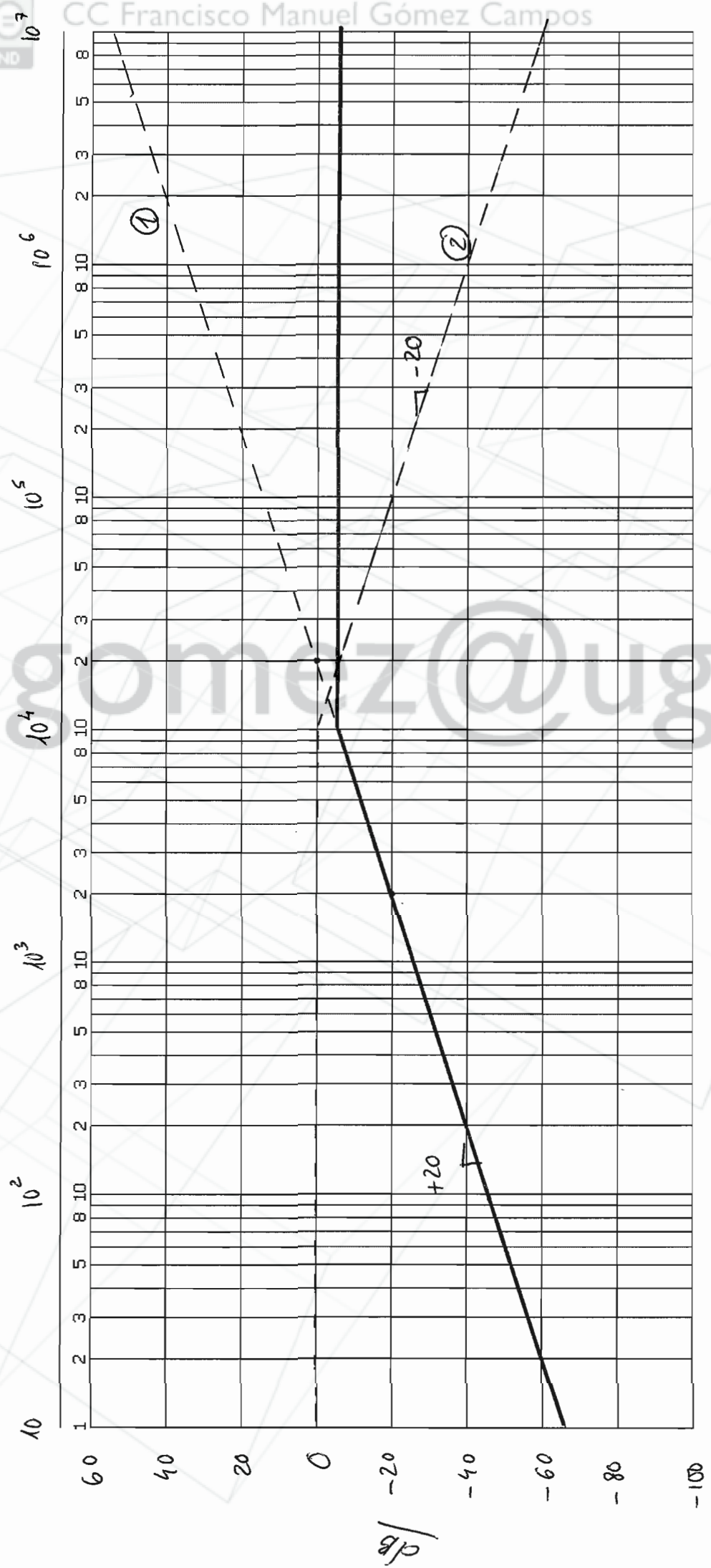
Calculamos  $V_{Th}$ . Es la caída de tensión entre A y B. Pero esto coincide con  $V_o$  del apartado a) !!!

$$\boxed{V_{Th} = \frac{s}{2 \cdot 10^4 + 2s} V_i = \frac{j\omega}{2 \cdot 10^4 + 2j\omega} V_i}$$

FIN

$\omega$  (rad/s)

Amplitud



— Total

