

LA CARTA DE SMITH

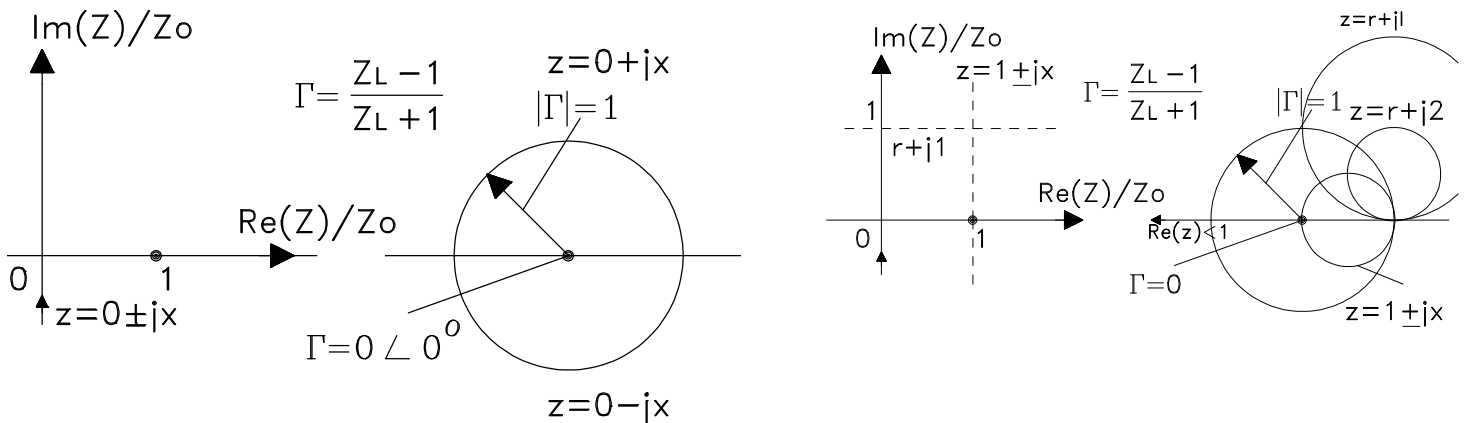
- Pensada para resolver ecuaciones muy repetidas en microondas:

$$\Gamma \equiv s = u + jv = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r+jx-1}{r+jx+1}$$

- Representación de plano de impedancias y del c. de reflexión

- Líneas $r=cte.$ -> círculos centro $[r/(r+1)+j0]$, radio $|1/(r+1)|$

- Líneas $x=cte$ -> círculos centro $[1+j1/x]$, radio $|1/x|$



- $z=1$ ($Z=50\Omega$), $|\Gamma|=0$

- $z=jx$ -> $|\Gamma|=1$ $0 < \varphi < 180^\circ$ ($x > 0$), $180 < \varphi < 360^\circ$ ($x < 0$)

- $z=1+jx$ -> $\Gamma=jx/(jx+2)$ círculo superior,

$z=1-jx$ -> $\Gamma=-jx/(-jx+2)$ círculo inferior

- $z=r+j1$ -> si $r > 0^+$ => Γ ->radio unidad,

si $r < 0$ => Γ sobrepasa círculo unidad

- $z=-1$ -> $\Gamma=\infty$

- z real, $z < 1$ => Γ se aproxima a círculo unidad

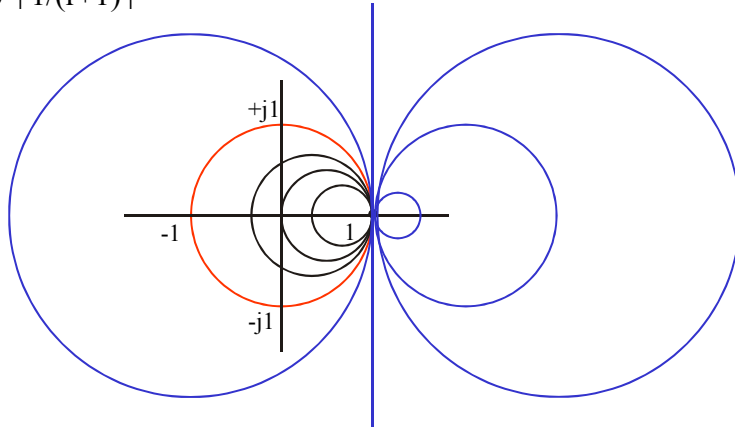
- $Re(z) < 0$ => Γ sigue en círculo de radio ∞

- Región externa al círculo unidad: impedancias con $Re(z) < 0$

Circunferencias de resistencia constante

Líneas $r=cte \Rightarrow$
 círcunferencias
 Centro: $r/(r+1)+j0$.
 Radio $|1/(r+1)|$

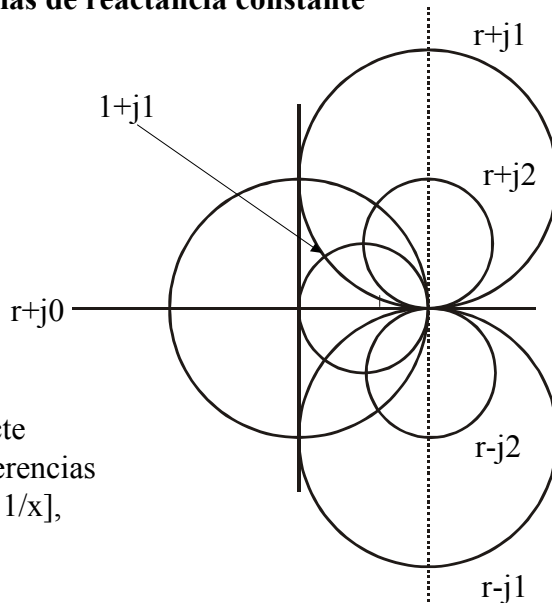
r	centro	radio	r	centro	radio
$+\infty$	1	0	-1/2	-1	2
+2	2/3	1/3	-1	$-\infty$	∞
+1	1/2	1/2	-3/2	3	2
+1/2	1/3	2/3	-2	2	1
0	0	1	-5	5/4	1/4



19

Circunferencias de reactancia constante

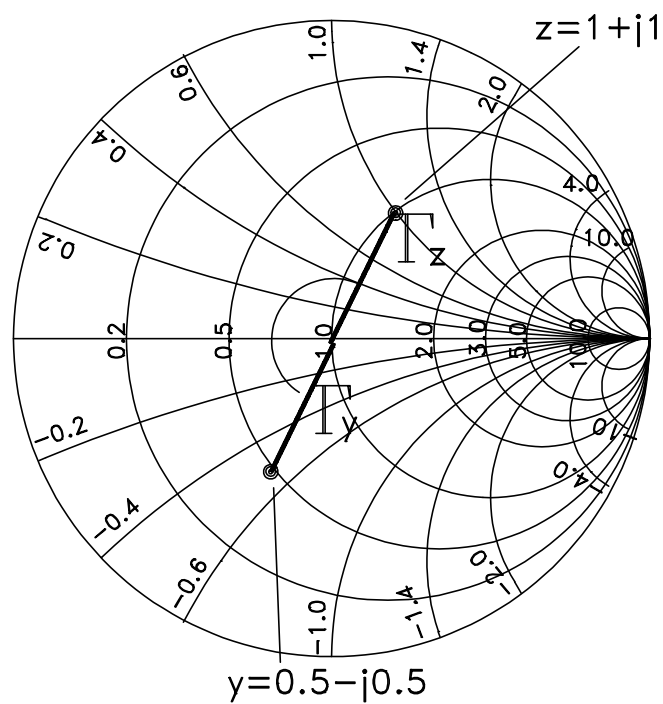
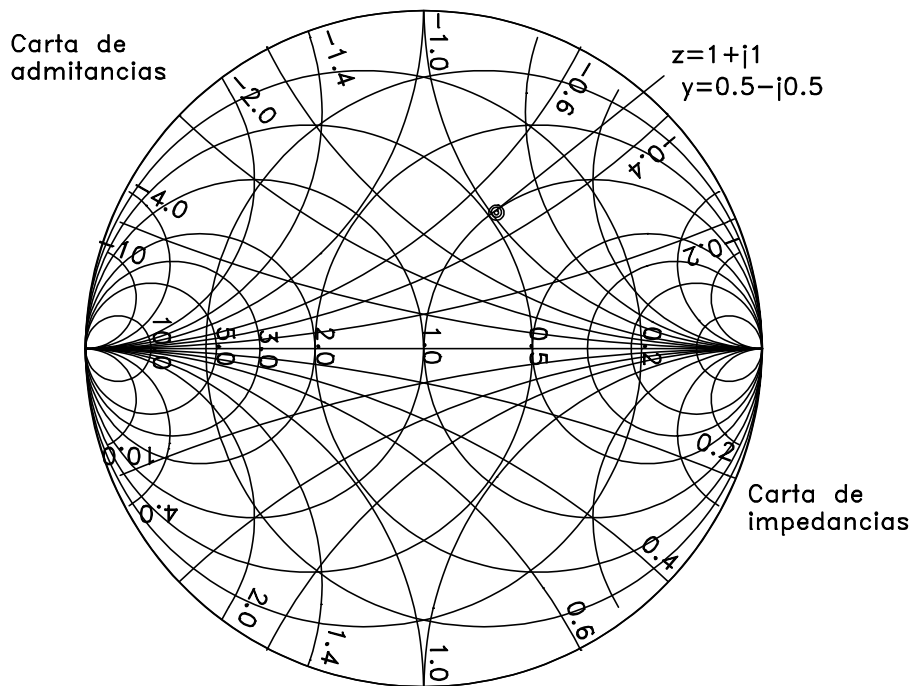
Líneas $x=cte \Rightarrow$
 círcunferencias
 centro $[1+j1/x]$,
 radio $1/x$



20

APLICACIONES DE LA CARTA DE SMITH

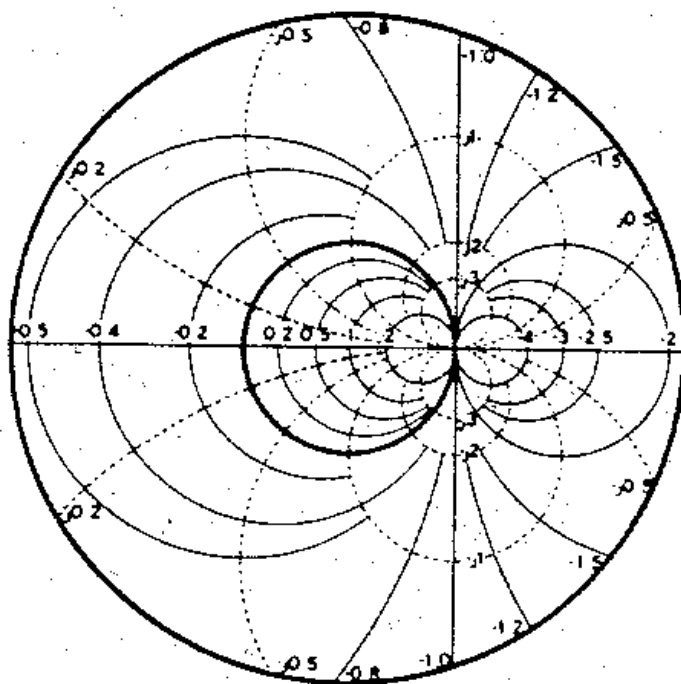
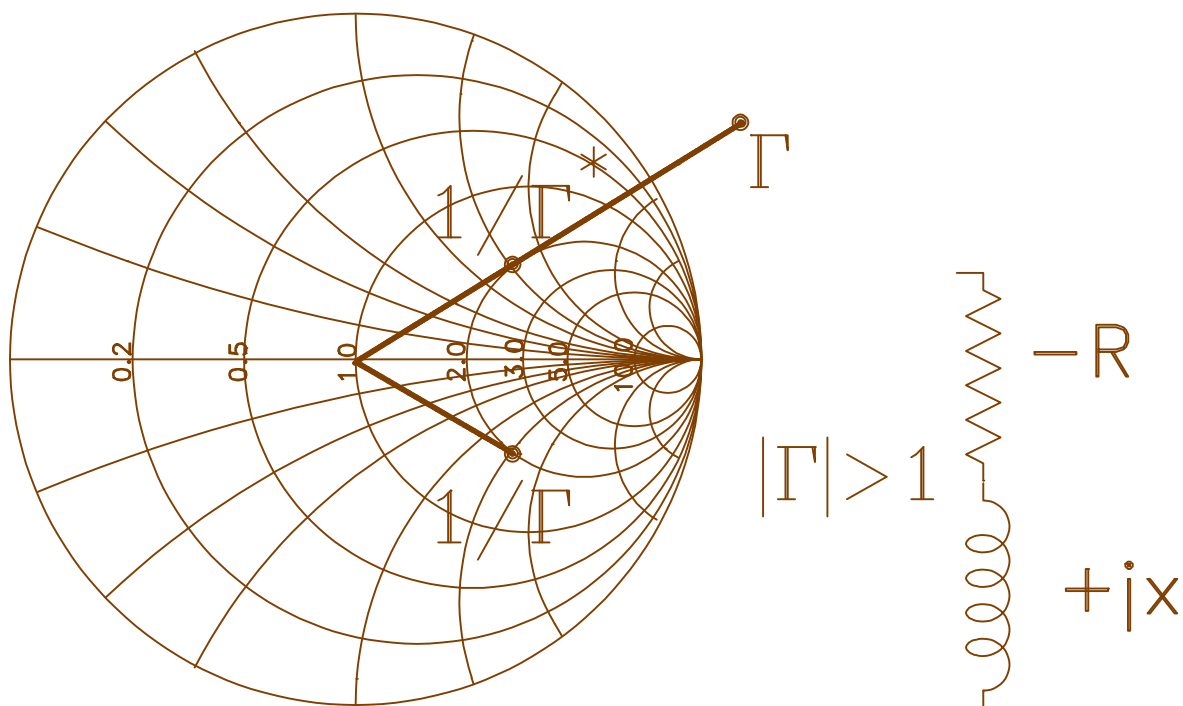
Conversión impedancia-admitancia



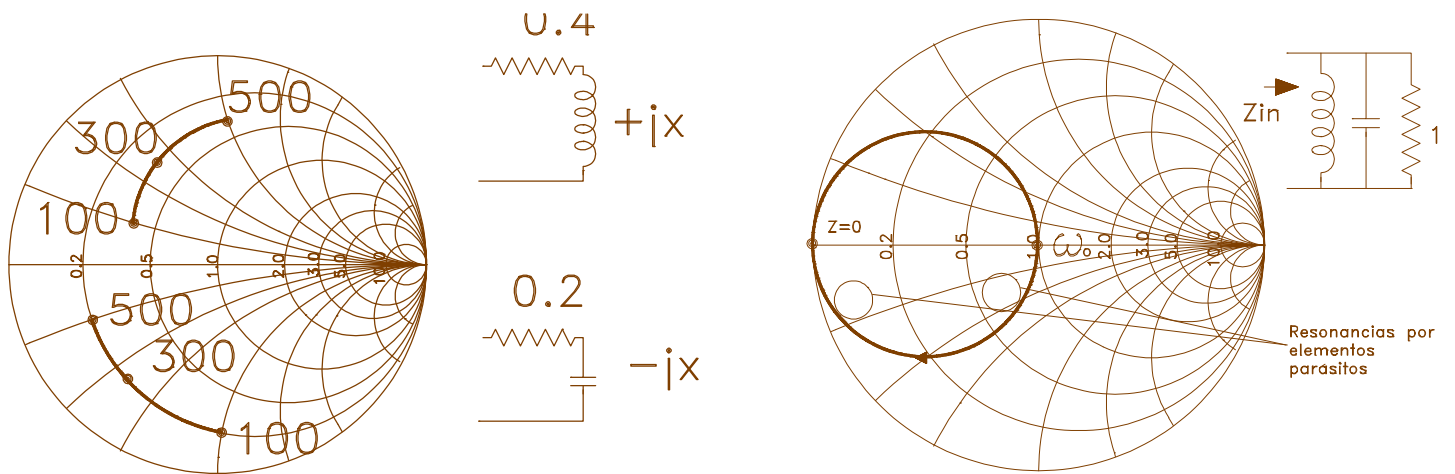
$$\Gamma_z = \frac{z-1}{z+1} \quad \Gamma_y = \frac{1-y}{1+y} \quad |y| = \frac{1}{|z|} \quad |\Gamma_z| = |\Gamma_y|$$

Impedancias con parte real negativa

$$\Gamma = \frac{-r-1+jx}{-r+1+jx} \quad \frac{1}{\Gamma^*} = \frac{r-1+jx}{r+1+jx}$$



Respuesta en frecuencia de redes

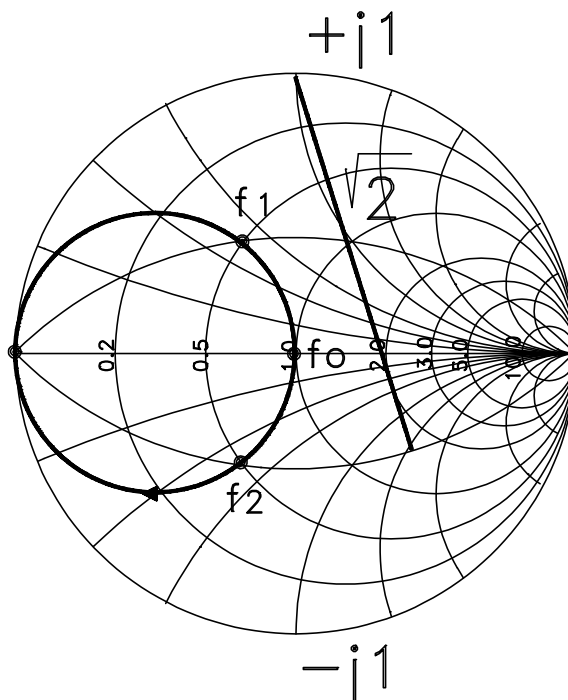


Medida de la Q de una cavidad

En las frecuencias (f_1, f_2) de potencia mitad $r=x$ ($z=r+jx$)

si $r=1 \Rightarrow$ centro en $\pm j1$ y radio $2^{1/2}$

$$Q = f_0 / (f_2 - f_1)$$



Q cargada de un circuito resonante: $Q_L = \frac{f_0}{BW}$

Q de un nodo de un circuito: $Q_n = \frac{|X_S|}{R_S}$

Donde $Z_S = R_S + jX_S$ es la impedancia equivalente vista desde dicho nudo

$$Q_n = \frac{|B_S|}{G_S}$$

Donde $Y_S = G_S + jB_S$ es la admitancia equivalente vista desde dicho nudo

21

Contornos de Q_n constante.

$$\Gamma = U + jV$$

$$z = r + jx = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1 - U^2 - V^2}{(1 - U^2) + V^2} + j \frac{2U}{(1 - U^2) + V^2}$$

$$Q_n = \frac{|x|}{r} = \frac{2U}{1 - U^2 - V^2}$$

$$U^2 + \left(V \pm \frac{1}{Q_n} \right)^2 = 1 + \frac{1}{Q_n^2}$$

Centro (0, -1/Qn) x>0

Centro (0, 1/Qn) x<0

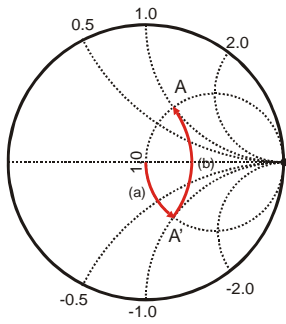
Radio $(1 + 1/Q_n^2)^{1/2}$

22

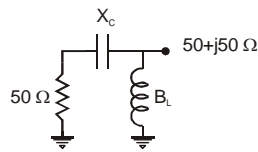
Adaptación de impedancias con la carta de Smith.

Uso de topologías específicas.

Puntos	impedancia				admitancia			
	r	x	R(Ω)	X(Ω)	g	b	G(Ω ⁻¹)	B(Ω ⁻¹)
inicial (i)	1	0	50	0	1	0	0.02	0
(A')	1	-1	50	-50	0.5	0.5	0.01	0.01
final (f)	1	1	50	50	0.5	-0.5	0.01	-0.01



$$Z_i = 50\Omega \quad Z_f = Z_A = 50 + j50\Omega$$



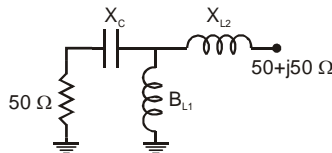
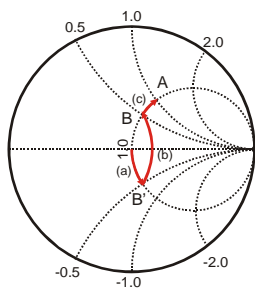
$$(a) \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = X_A - X_i = -50 - 0\Omega = -50\Omega$$

$$(b) \quad B_L = -\frac{1}{\omega L} = B_f - B_A = -0.01 - 0.01\Omega^{-1} = -0.02\Omega^{-1}; \quad \omega L = 50\Omega \quad 23$$

Adaptación de impedancias con la carta de Smith.

$$Z_i = 50\Omega \quad Z_f = Z_A = 50 + j50\Omega$$

Puntos	impedancia				admitancia			
	r	x	R(Ω)	X(Ω)	g	b	G(Ω ⁻¹)	B(Ω ⁻¹)
Inicial (i)	1	0	50	0	1	0	0.02	0
(B')	1	-0.5	50	-25	0.8	0.4	0.016	0.008
(B)	1	0.5	50	25	0.8	-0.4	0.016	-0.008
Punto final (f)	1	1	50	50	0.5	0.5	0.01	-0.01

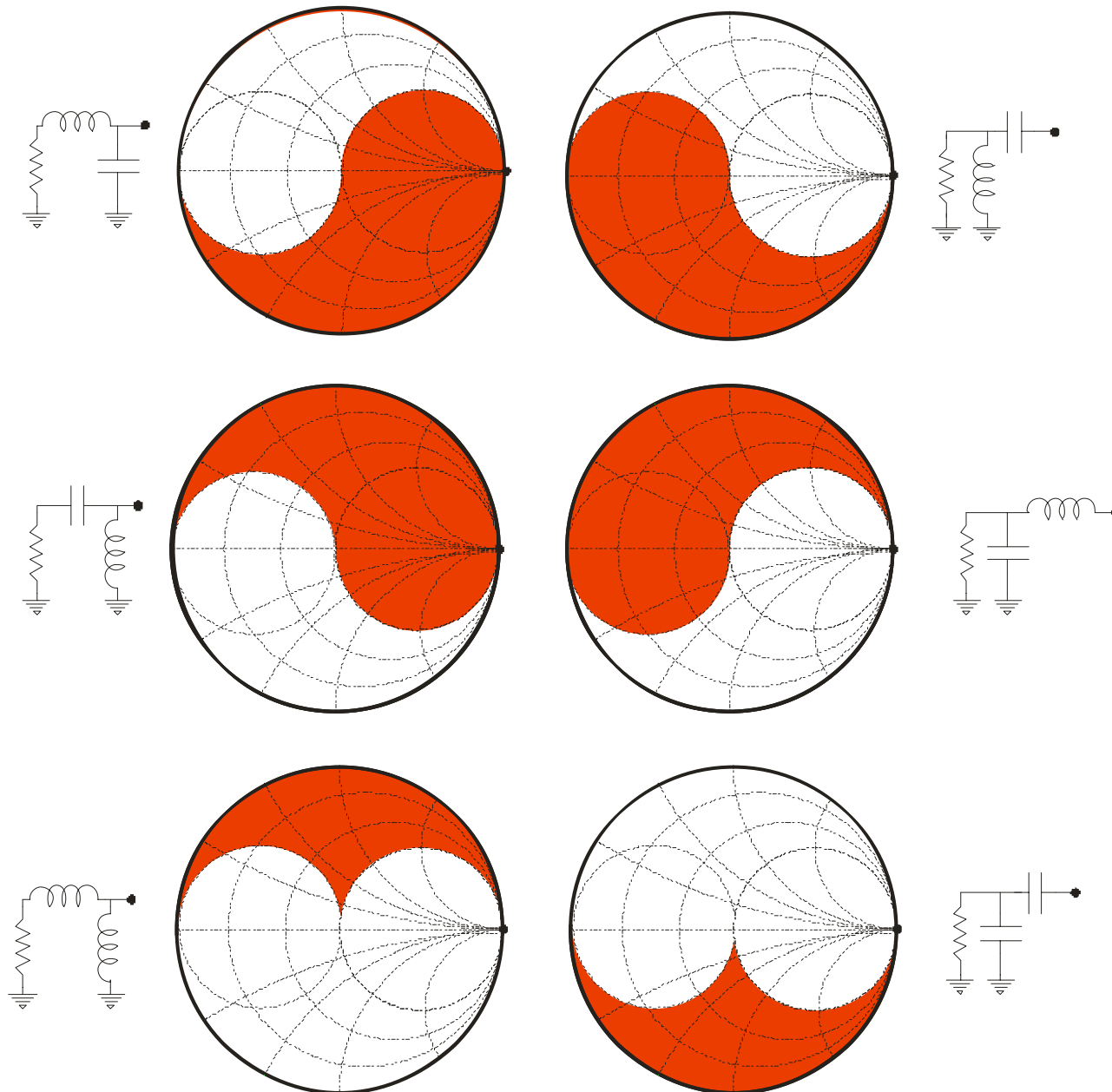


$$(a) \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} = X_B - X_i = -25 - 0\Omega = -25\Omega$$

$$(b) \quad B_{L1} = -\frac{1}{\omega L_1} = B_B - B_{B'} = -0.008 - 0.008\Omega^{-1} = -0.016\Omega^{-1}; \quad \omega L = 62.5\Omega$$

$$(c) \quad X_{L2} = \omega L_2 = X_f - X_B = -50 - 25\Omega = 25\Omega \quad 24$$

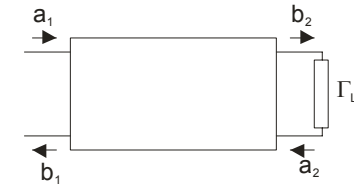
Uso de topologías específicas. Restricción de impedancias.



Adaptación de impedancias con líneas de transmisión

- Parámetros S de líneas de transmisión \longrightarrow $S_{11}=S_{22}=0$
 $S_{12}=S_{21}=e^{-j\Theta}$ $\Theta=\omega l/c=2\pi l/\lambda$
- Línea terminada en carga Γ_L :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\ \Gamma_L = a_2/b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow S'_{11} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} = e^{-j2\theta}\Gamma_L = \rho_L \angle \theta_L - 2\theta$$



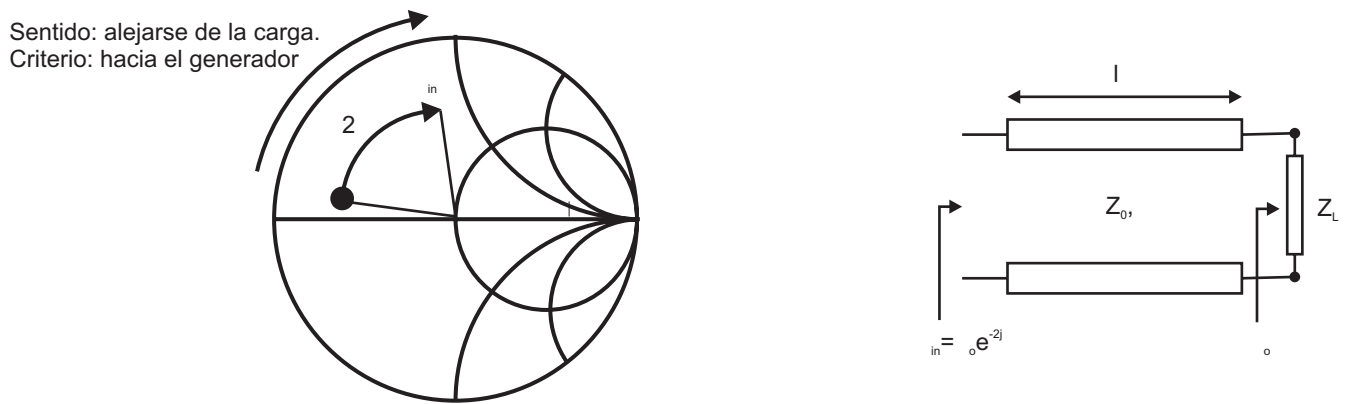
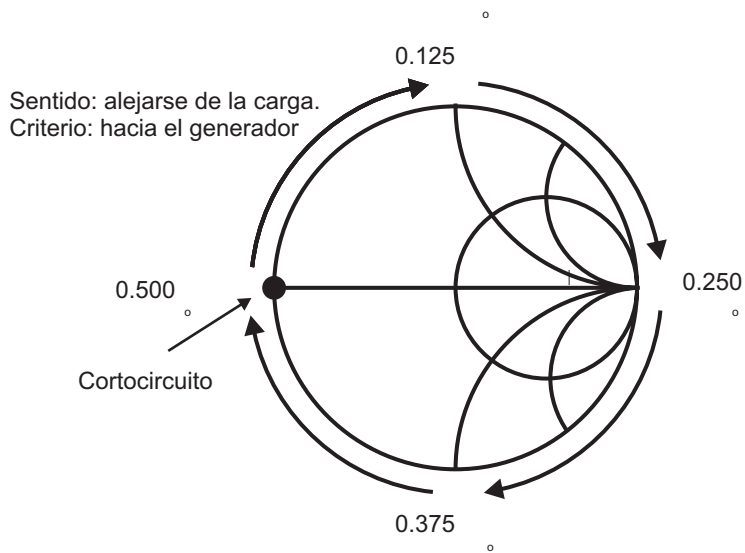
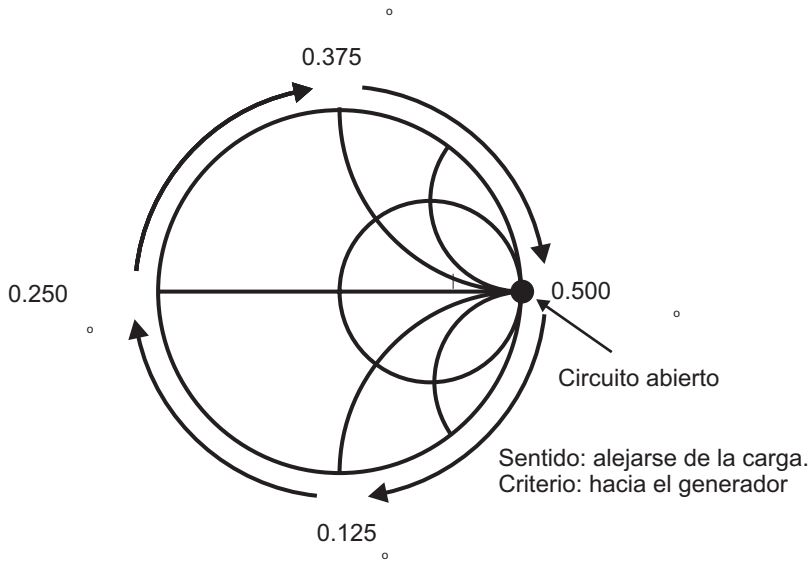
- $\Gamma_L=1$ circuito abierto
open stub: reactancia capacitiva \longrightarrow $S'_{11} = e^{-j2\theta}\Gamma_L = 1 \angle -2\theta$
 $z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = -j \cot \theta; \quad y = j \tan \theta$

- $\Gamma_L=-1$ cortocircuito
shorted stub: reactancia inductiva \longrightarrow $S'_{11} = -e^{-j2\theta}\Gamma_L = 1 \angle 180 - 2\theta$
 $z = j \tan \theta; \quad y = -j \cot \theta$

- Dada reactancia \Rightarrow longitud eléctrica:
open stub: \longrightarrow $\theta_{oc} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{R_0}{X_c}\right)$ $\theta_{sc} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{X_L}{R_0}\right)$
empieza en 0° y rota en sentido horario 2θ
shorted stub:
empieza en 180° y rota en sentido horario 2θ

- Cada $\lambda/4$ la reactancia cambia de signo
 - útil cuando no se pueden hacer cortocircuitos.
 - shorted stub $45^\circ =$ open stub $(90-45)^\circ$
 - secciones $\lambda/2$ para separar componentes
 - a mayor longitud más selectivos

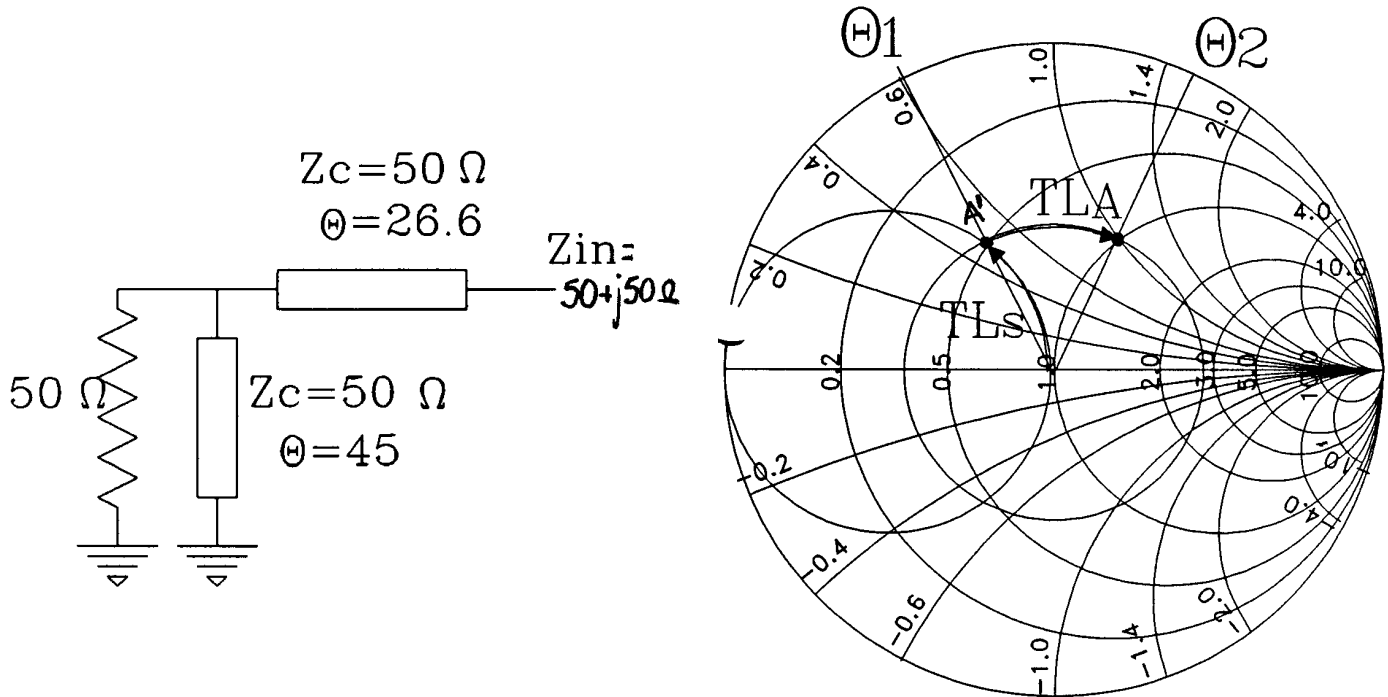
f=1GHz	s.s. 45°	o.s. 135°
f=1GHz	$z=j\text{tg}45^\circ=1j$	$-j\cot135^\circ=1j$
f=1.2GHz	$\theta=45 \cdot 1.2=54^\circ$	$\theta=162^\circ$
f=1.2GHz	$z=1.35j$	$z=3.08j$



Topologías de elementos distribuidos

- Conexión serie de open-stub y shorted stub difícil con microstrip
- Para conseguir la tierra para polarización y el elemento serie para corregir inductancias parásitas de transistores y cables:

Shorted stub paralelo TLs + línea de transmisión TL



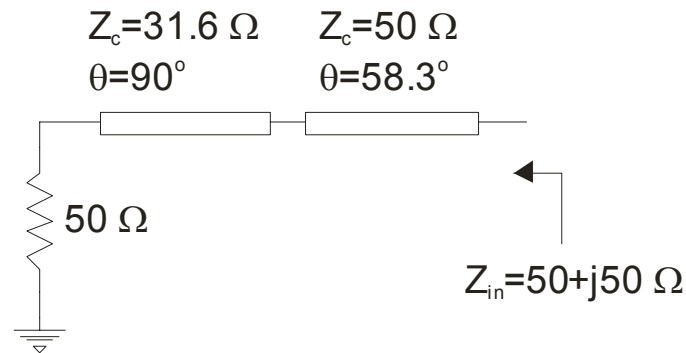
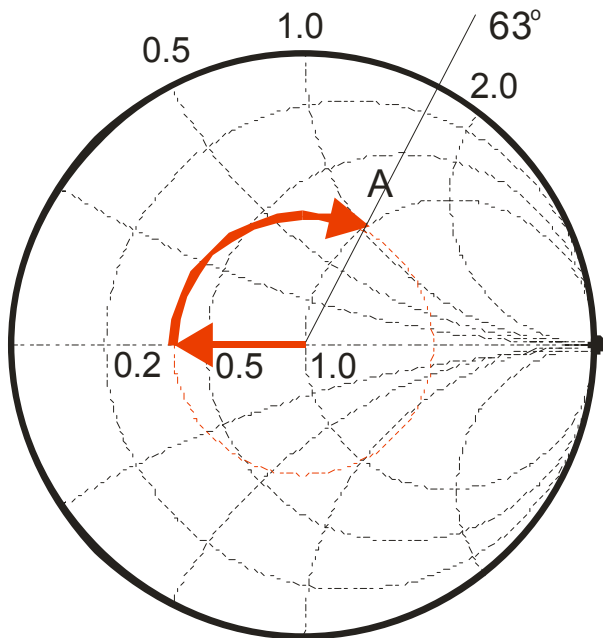
- Origen $\rightarrow A'$: círculo de conductancia cte. $=20 \text{ mmho} \Rightarrow B_L = -20 \text{ mmho}$
longitud shorted stub = desde 180° hasta encontrar el círculo de susceptancia normalizada $-1 = (180-90)/2 = 45^\circ$
- Línea de transmisión: $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ rotando en sentido horario
 A' : $\theta_1 = 116.6^\circ$, A : $\theta_2 = 63.4^\circ \Rightarrow$
longitud eléctrica $= -(63.4 - 116.6)/2 = 26.6^\circ$
- condensador de desacoplo si es necesario
- "Bypass" en el shorted stub: condensadores u open stub $\lambda/4$ (buena tierra RF a frecuencia determinada)

Impedancia característica de líneas \neq Impedancia de referencia.

- Línea terminada en cortocircuito o circuito abierto: $\longrightarrow Z_0 = -jZ_c \cot \theta_0, Z_s = jZ_c \cot \theta_s$
- Γ para línea terminada: expresión compleja $\longrightarrow Z_{in} = Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan \theta}{Z_c + jZ_L \tan \theta}$
 - renormalizar carta, rotar y volver a normalizar
- Caso simple especial: línea $\lambda/4$ $Z_c \neq Z_0$ $\longrightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_L}, Z_c = \sqrt{Z_{in}Z_L}$

Si $Z_{in}, Z_L \in \mathbb{R} \Rightarrow Z_c \in \mathbb{R}$ y se puede trasladar $Z_L \rightarrow Z_{in}$ con línea $\lambda/4$

Ej.: $50\Omega \rightarrow 20\Omega$ con $\lambda/4$ de impedancia $Z_c = (50 \cdot 20)^{1/2} = 31.62\Omega$



20Ω en círculo que pasa por A \Rightarrow añadir línea de longitud $-(63.4-180)/2=58.3^\circ$

PARÁMETROS S DE TRANSFERENCIA

Útil para combinar redes en cascada

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

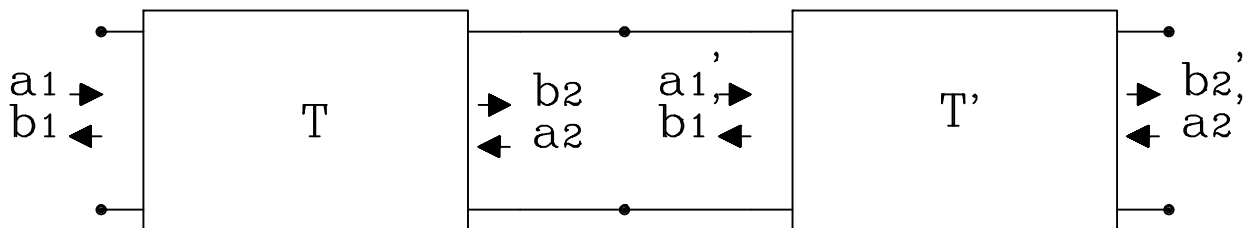
$$T_{11} = -\frac{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}}{S_{21}}, \quad T_{12} = \frac{S_{11}}{S_{21}}, \quad T_{21} = -\frac{S_{22}}{S_{21}}, \quad T_{22} = \frac{1}{S_{21}}$$

$$S_{11} = \frac{T_{12}}{T_{22}}, \quad S_{12} = \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}}{T_{22}}, \quad S_{21} = \frac{1}{T_{22}}, \quad S_{22} = -\frac{T_{21}}{T_{22}}$$

Ondas de salida como variables dependientes:

$$[T_A] = \begin{bmatrix} \frac{S_{12}S_{21} - S_{11}S_{22}}{S_{12}} & \frac{S_{22}}{S_{12}} \\ -\frac{S_{11}}{S_{12}} & \frac{1}{S_{12}} \end{bmatrix}$$

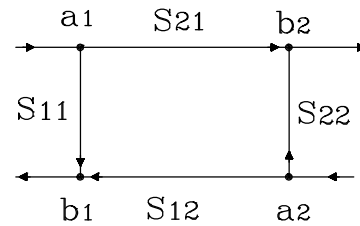
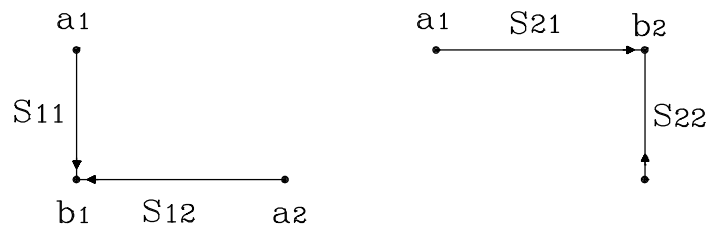
(problema con redes unilaterales)



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2' \\ b_2' \end{bmatrix}$$

DIAGRAMA DE FLUJO DE SEÑAL

- 1) Cada variable a_1, a_2, b_1, b_2 se designa como un nudo
- 2) Cada parámetro S es una rama
- 3) Rama de nudo de variable independiente a dependiente
- 4) b_1, b_2 : variables dependientes, a_1, a_2 : v. independientes.
- 5) Nudo = suma de variables que convergen en él



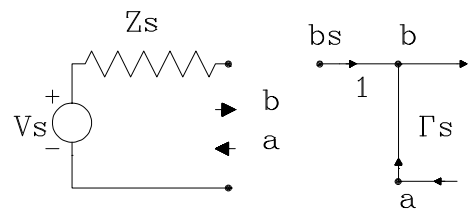
$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

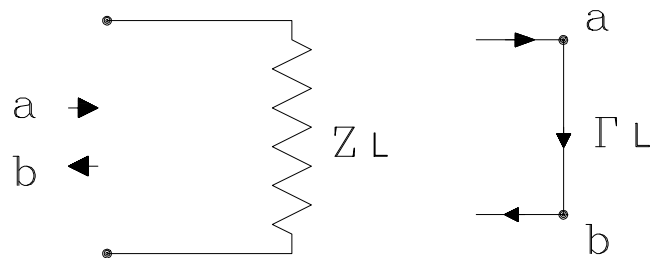
Aplicaciones

- 1) Generador de tensión (ver apéndice)

$$b_s = V_s \frac{\sqrt{Z_0}}{Z_s + Z_0}$$

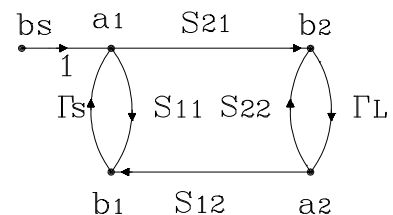
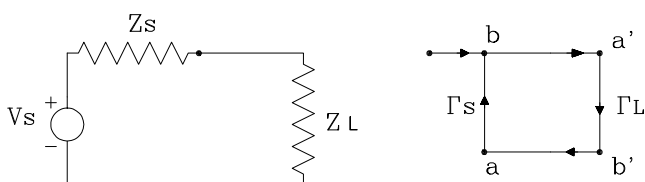


- 2) Carga



- 3) Carga conectada al generador

- 4) Red entre generador y carga.

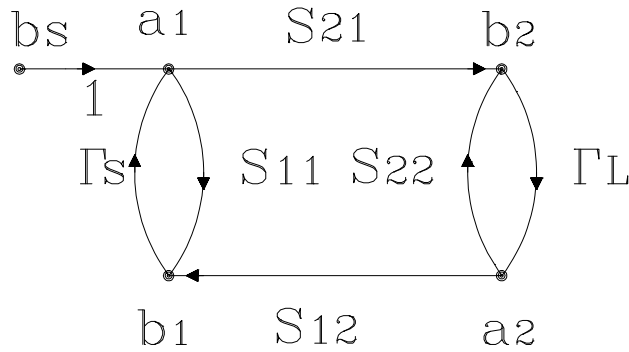


REGLA DE MASON O DE LAZOS NO TOCANTES

Lazo de 1^{er} orden: producto de ramas en un bucle siguiendo flechas

Lazo de 2^o orden: producto de 2 lazos de 1^{er} orden no tocantes

Lazo de n orden: producto de n lazos de 1^{er} orden no tocantes



Cálculo de un nudo de la red (Ej: b_1):

- 1) Identificar variables independientes (b_s)
- 2) Identificar caminos entre b_s y b_1 siguiendo flechas (S_{11} , $S_{21}\Gamma_L S_{21}$)
- 3) Encontrar lazos no tocantes respecto a los caminos encontrados ($S_{22}\Gamma_L$ no toca con camino S_{11})
- 4) Regla de lazos no tocantes:

$$T = \frac{b_1}{b_s} = \frac{P_1[1 - \sum L(1)^1 - \sum L(2)^1 - \dots] + P_2[1 - \sum L(1)^2 \dots]}{1 - \sum L(1) + \sum L(2) - \sum L(3) + \dots}$$

P_i : camino i

$\sum L(k)^i$: suma de lazos de orden k que no tocan con camino i

$\sum L(k)$: suma de lazos de orden k

$$\frac{b_1}{b_s} = \frac{S_{11}(1 - \Gamma_L S_{22}) + S_{21}\Gamma_L S_{12}(1)}{1 - (S_{11}\Gamma_s + S_{22}\Gamma_L + S_{21}\Gamma_L S_{12}\Gamma_s) + S_{11}\Gamma_s S_{22}\Gamma_L}$$

Regla útil para encontrar expresiones de ganancia y potencia:

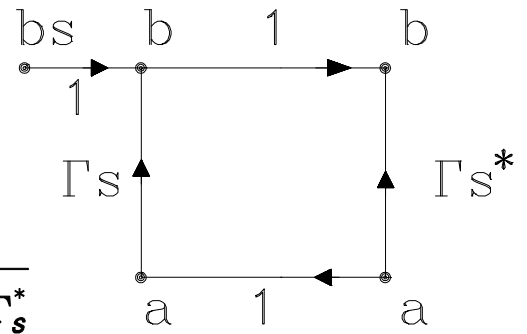
Potencia entregada a la carga: $P_{del} = P_{incidente} - P_{reflejada} = |a'|^2 - |b'|^2$

Potencia disponible en la fuente: potencia entregada a una carga adaptada conjugada

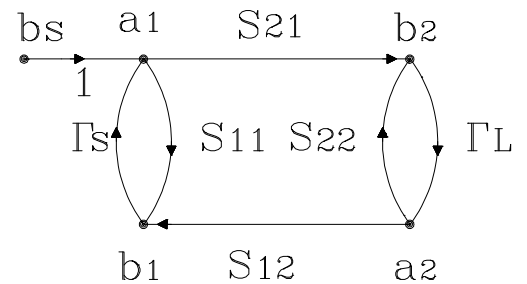
$$P_{avs} = [|a'|^2 - |b'|^2] = [|b|^2 - |a|^2]$$

$$\frac{b}{b_s} = \frac{1}{1 - \Gamma_s \Gamma_s^*} \quad \frac{a}{b_s} = \frac{\Gamma_s^*}{1 - \Gamma_s \Gamma_s^*}$$

$$P_{avs} = \frac{|b_s|^2}{1 - |\Gamma_s|^2}$$



Ganancia en tensión: cociente entre tensiones totales



$$A_v = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{\frac{a_2}{b_s} + \frac{b_2}{b_s}}{\frac{a_1}{b_s} + \frac{b_1}{b_s}} = \frac{S_{21}\Gamma_L + S_{21}}{1(1 - S_{22}\Gamma_L) + S_{11}(1 - S_{22}\Gamma_L) + S_{21}\Gamma_L S_{12}}$$

Ganancia de transducción: potencia entregada a la carga entre potencia disponible en la fuente $G_t = P_{del} / P_{avs}$

$$G_t = \frac{|b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|b_s|^2 (1 - |\Gamma_s|^2)}$$

$$\frac{b_2}{b_s} = \frac{S_{21}}{1 - \Gamma_s S_{11} - S_{22}\Gamma_L - S_{21} S_{12}\Gamma_L \Gamma_s + S_{11}\Gamma_s S_{22}\Gamma_L}$$

$$G_t = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_s|^2) (1 - |\Gamma_L|^2)}{|(1 - S_{11}\Gamma_s)(1 - S_{22}\Gamma_L) - S_{12} S_{21}\Gamma_L \Gamma_s|^2}$$

Objetivo fundamental: maximizar ganancia de transducción.

DEFINICIONES DE GANANCIA

Ganancia de transducción $G_t = P_L / P_{avs}$ (reorganizando el denominador)

$$G_t = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - \Gamma_{in} \Gamma_s|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \Gamma_L|^2}$$

$$G_t = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - S_{11} \Gamma_s|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_{out} \Gamma_L|^2}$$

Ganancia de potencia G_p : cociente entre potencia entregada a la carga y potencia de entrada a la red P_{in}

$$P_{in} = |a_1|^2 - |b_1|^2 = |a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)$$

$$G_p = \frac{P_L}{P_{in}} = \frac{|b_2|^2 (1 - |\Gamma_L|^2)}{|a_1|^2 (1 - |\Gamma_{in}|^2)}$$

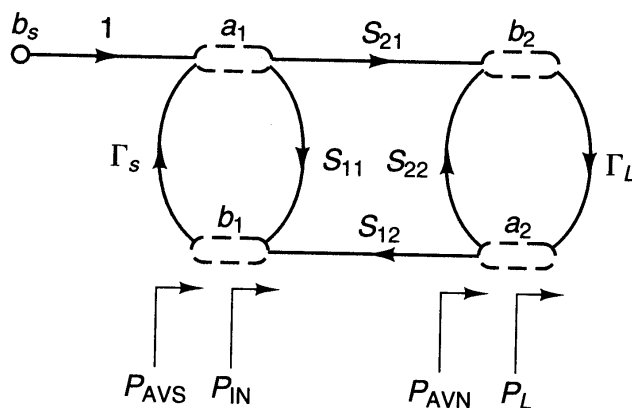
$$G_p = \frac{1}{1 - |\Gamma_{in}|^2} |S_{21}|^2 \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - S_{22} \Gamma_L|^2}$$

Ganancia de potencia disponible P_A : cociente entre potencia disponible en la red P_{avn} y la potencia disponible en la fuente P_{avs} .

$$P_{avn} = P_L |_{\Gamma_L = \Gamma_{out}^*} = (|b_2|^2 - |a_2|^2) |_{\Gamma_L = \Gamma_{out}^*} = |b_2|^2 (1 - |\Gamma_{out}|^2)$$

$$G_A = \frac{P_{avn}}{P_{avs}} = \frac{|b_2|^2}{|b_s|^2} (1 - |\Gamma_{out}|^2) (1 - |\Gamma_s|^2)$$

$$G_A = \frac{1 - |\Gamma_s|^2}{|1 - S_{11} \Gamma_s|^2} |S_{21}|^2 \frac{1}{1 - |\Gamma_{out}|^2}$$



$$P_{IN} = \frac{1}{2} |a_1|^2 - \frac{1}{2} |b_1|^2$$

$$P_L = \frac{1}{2} |b_2|^2 - \frac{1}{2} |a_2|^2$$

$$P_{AVS} = P_{IN} |_{\Gamma_{IN} = \Gamma_s^*}$$

$$P_{AVN} = P_L |_{\Gamma_L = \Gamma_{OUT}^*}$$

¡Cuidado con el factor 1/2!

ESTABILIDAD

Maximizar $G_t \Rightarrow$ adaptar de forma conjugada salida y entrada.

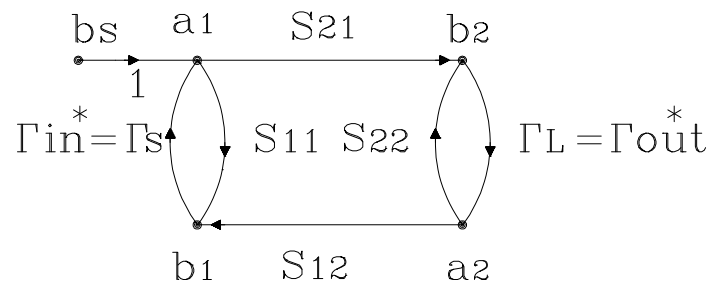
Inconvenientes: puede oscilar el amplificador con ciertas impedancias.

- Red condicionalmente estable: $\text{Re}(Z_{in}), \text{Re}(Z_{out}) > 0$ para algunas impedancias positivas de fuente y carga a una frecuencia específica.

- Red incondicionalmente estable: $\text{Re}(Z_{in}), \text{Re}(Z_{out}) > 0$ para cualquier impedancia real positiva de carga y fuente ($|\Gamma_s| \leq 1, |\Gamma_L| \leq 1$)

$$\Gamma_{in} = \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

$$\Gamma_{out} = \frac{b_2}{a_2} = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_s}{1 - S_{11} \Gamma_s}$$



$|\Gamma_{in}| = 1$: límite de separación de regiones estable y no estable.

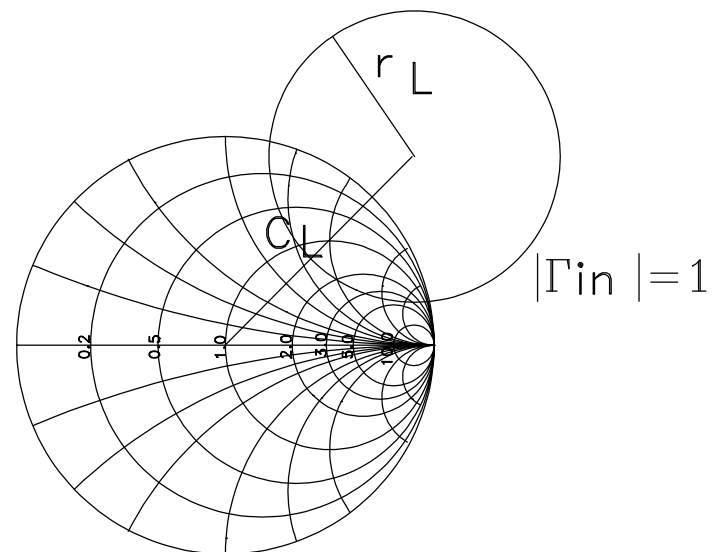
Ecuación de circunferencia de radio y centro:

$$r_L = \left| \frac{S_{12} S_{21}}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \right| \quad C_L = \frac{(S_{22} - \Delta S_{11}^*)^*}{|S_{22}|^2 - |\Delta|^2} \quad \Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$$

Para $Z_L = 50\Omega$ ($\Gamma_L = 0$) $|\Gamma_{in}| = |S_{11}|$

Si $|S_{11}| < 1$ región estable.

No situarse próximo al borde por problema de alteraciones por temperatura, envejecimiento, sustitución de transistores.



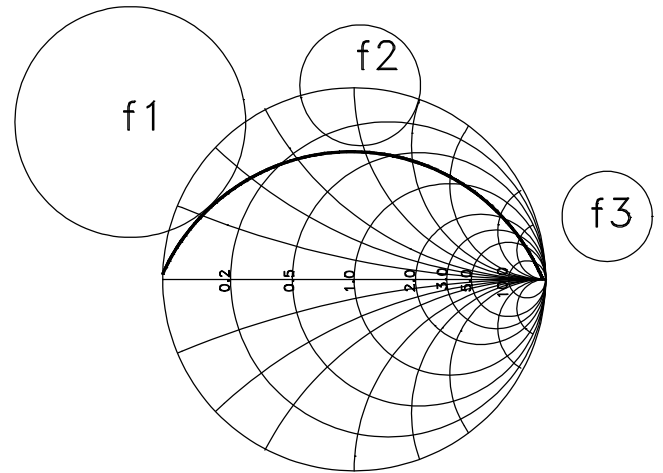
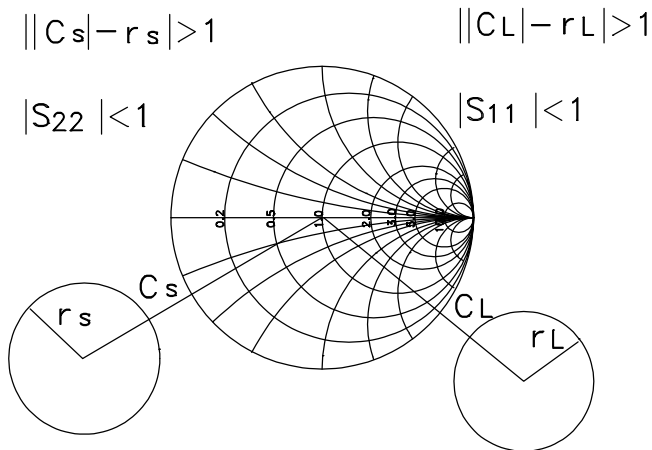
Estabilidad incondicional

$$K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2 |S_{12}S_{21}|} \geq 1$$

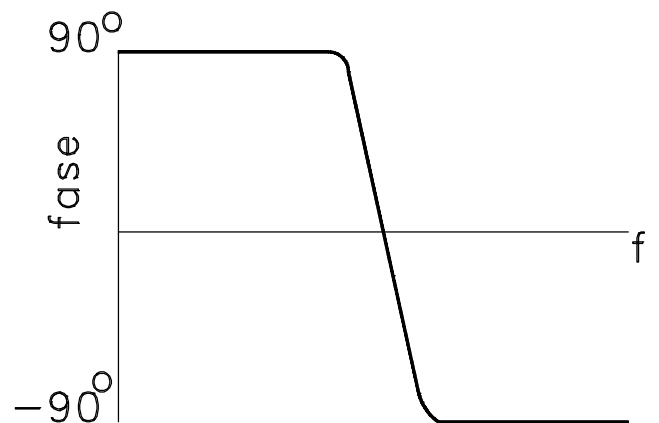
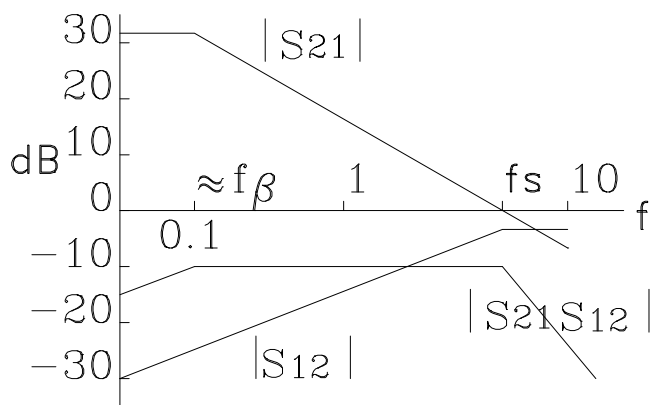
$$|S_{12}S_{21}| < 1 - |S_{11}|^2, \quad |S_{12}S_{21}| < 1 - |S_{22}|^2$$

$$\Downarrow$$

$$K \geq 1, \quad |\Delta| = |S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}| \leq 1$$

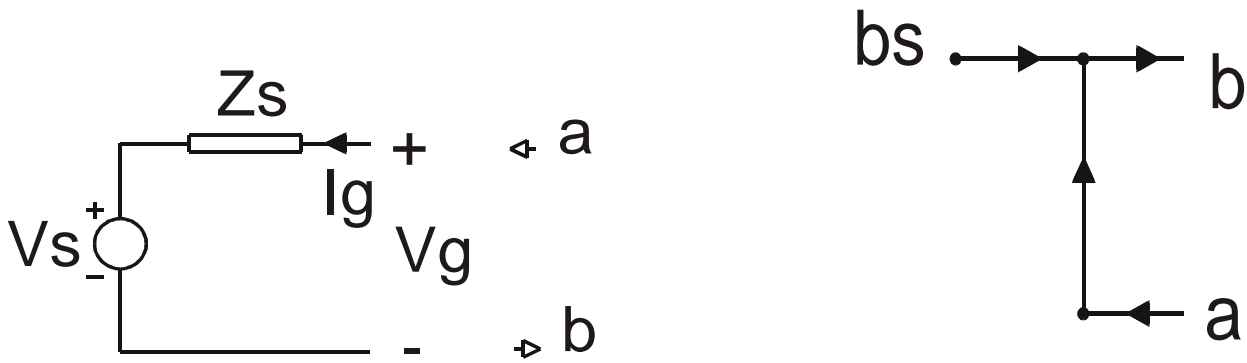


Estabilidad en un rango de frecuencias: se construye círculos donde pueda existir problema. Proceso tedioso. Mejor experiencia:



- Región plana de $|S_{12}|$ $|S_{21}|$ la más preocupante
- Inductores con comportamiento capacitivo a altas frecuencias.
- Diodos túnel: investigar estabilidad fuera de rango de trabajo

Apéndice: Representación de un generador de tensión mediante el diagrama de flujo



$$V_g = V_s + I_g Z_s$$

$$V_g^+ + V_g^- = V_s + \frac{(V_g^+ - V_g^-)}{Z_0} Z_s$$

$$V_g^- = V_s \frac{Z_0}{Z_0 + Z_s} + V_g^+ \frac{Z_s - Z_0}{Z_0 + Z_s}$$

$$\frac{V_g^-}{\sqrt{Z_0}} = V_s \frac{\sqrt{Z_0}}{Z_0 + Z_s} + \frac{V_g^+}{\sqrt{Z_0}} \frac{Z_s - Z_0}{Z_0 + Z_s}$$

$$b = b_s + a \Gamma_s$$

Potencia cedida a carga Z_0

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(I^* V) = \frac{1}{2} V_s \frac{Z_0}{Z_s + Z_0} V_s^* \frac{1}{(Z_s + Z_0)^*} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{Z_0}{|Z_s + Z_0|^2} = \frac{1}{2} |b_s|^2$$

Se demuestra de esta manera que la variable b_s tiene el mismo carácter que las variables a y b , es decir, su módulo al cuadrado nos da idea de potencia (con el factor 1/2)

