MÉTODOS MATEMÁTICOS I. 2021-2022 grupo A.

Problemas para entregar

E1. Para $z \in \mathbb{C}$ demuestra que las dos afirmaciones que siguen son equivalentes

$$a) \quad |z| = 1$$
$$b) \quad z + 1/z \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |z + 1/z| \leq 2$$

Solución:

$(a \implies b)$ Suponemos $|z| = 1$, entonces

$$z = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) = e^{i\theta}, \qquad z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Se sigue que $z + 1/z = 2\cos(\theta)$ por tanto $z + 1/z \in \mathbb{R}$ y $|z + 1/z| \leq 2$ ya que $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$. (Alternativamente $|z + 1/z| \leq |z| + |1/z| = 2$, por la desigualdad triangular.)

$(b \implies a)$ Suponemos $z + 1/z \in \mathbb{R}$ y $|z + 1/z| \leq 2$.

$$z = re^{i\theta} \qquad z + \frac{1}{z} = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = (r + \frac{1}{r})\cos(\theta) + i(r - \frac{1}{r})\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Dado que $z + 1/z \in \mathbb{R}$ se sigue que $(r - \frac{1}{r})\,\mathrm{sen}(\theta) = 0$. Hay dos posibilidades:
O bien $r - 1/r = 0$ y entonces $r = 1$, es decir $|z| = 1$.
O bien $\mathrm{sen}(\theta) = 0$ (z es real) que implica $\cos(\theta) = \pm 1$. En este caso $2 \geq |z + 1/z| = r + 1/r$. Es fácil ver que esta desigualdad sólo permite $r = 1$. Por ejemplo,

$$r + 1/r \leq 2 \implies r^2 + 1 - 2r \leq 0 \implies (r-1)^2 \leq 0, \quad \text{junto con} \quad (r-1)^2 \geq 0 \implies r - 1 = 0$$

Alternativamente se puede buscar el mínimo de la función $f(r) = r + 1/r$ para $r > 0$. $0 = f'(r) = 1 - 1/r^2$ ocurre en $r = 1$ ($f''(r) = 2/r^3 > 0$, es un mínimo, la función es cóncava). $f(1) = 2$, y para $r \neq 1$ $f(r) > 2$.

E2.

$a)$ Encuentra la clausura $\bar{A}$ del conjunto $A = \left\{1 + i^n \dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. ¿Es $B = \mathbb{C} \setminus \bar{A}$ un dominio? y en ese caso, ¿es B simplemente conexo?

$b)$ Sea $\{z_n\}$ una sucesión compleja tal que $\forall n\ z_n \neq 0$ y convergente a α. Demuestra que la sucesión $\{1/z_n\}$ converge a $1/\alpha$ si $\alpha \neq 0$.

$c)$ $\{z_n\}$ como antes, demuestra que $\lim_{n\to\infty} 1/z_n = \infty$ si $\alpha = 0$.

Solución:

$a)$ Dado que $i^n = 1, i, -1, -i$ para $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$, A se puede descomponer como $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & A_1 &= \left\{1 + i\frac{n}{n+1} = \frac{(1+i)n+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \\ A_2 &= \left\{1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & A_3 &= \left\{1 - i\frac{n}{n+1} = \frac{(1-i)n+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

Los conjuntos A_k, $k = 0, 1, 2, 3$, son discretos, igual que A (los puntos del conjunto son aislados, no de acumulación). Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, los puntos límite de A_k son $1 + i^k$, para $k = 0, 1, 2, 3$, es decir, 2, $1+i$, 0 y $1-i$, respectivamente. Por tanto,

$$\bar{A} = A \cup \{0, 2, 1+i, 1-i\}$$

El conjunto B es abierto por ser complementario de $\bar{A}$ que es cerrado por construcción, además es no vacío y conexo (cualquier par de puntos que no sean de $\bar{A}$ se puede conectar por un arco sin pasar por $\bar{A}$). Luego B es un dominio. Sin embargo no es simplemente conexo: hay curvas cerradas y simples contenidas en B cuyo interior no está contenido en B. Por ejemplo la circunferencia $C(0,5)$ encierra todos los puntos de $\bar{A}$, esos puntos no son de B pero están en el interior de la circunferencia.

$b)$ Por hipótesis $z_n \to \alpha \neq 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad \forall n > \nu \quad |z_n - \alpha| < \varepsilon$. Se quiere probar que $1/z_n - 1/\alpha$ se puede hacer arbitrariamente pequeño.

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - z_n}{\alpha z_n}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|\alpha||z_n|}$$

$|z_n - \alpha|$ ya está acotado por ε, falta acotar $1/|z_n|$. Puesto que $|z_n - \alpha|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño se puede hacer menor que $|\alpha|/2$ (además de menor que ε) eligiendo ν suficientemente grande (esto requiere $\alpha \neq 0$). En este caso $|z_n| > |\alpha|/2$, en efecto

$$|z_n| = |\alpha + z_n - \alpha| \geq |\alpha| - |z_n - \alpha| > |\alpha| - |\alpha|/2 = |\alpha|/2$$

(usando $|z_n - \alpha| < |\alpha|/2$). Esto implica $1/|z_n| < 2/|\alpha|$. En conjunto

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|\alpha||z_n|} < \frac{2\varepsilon}{|\alpha|^2}$$

$|1/z_n - 1/\alpha|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, menor que cualquier $\varepsilon' > 0$ tomando $\varepsilon = \varepsilon'|\alpha|^2/2 > 0$ (ya que $\alpha \neq 0$).

c) Ahora $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad \forall n > \nu \quad |z_n| < \varepsilon$. Entonces $\forall K > 0 \quad \exists \nu \quad \forall n > \nu \quad |1/z_n| > K$ tomando $\varepsilon = 1/K$, y por definición $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \infty$.

E3. Simplifica al máximo la expresión

$$\frac{2\pi i\, e^{i\pi a} e^{-2\pi i/3}}{1 - e^{2\pi i a} e^{2\pi i/3}}$$

de modo que sea manifiestamente real y positiva cuando $-\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$. La expresión final sólo requiere una función trigonométrica.

Solución:

$$\frac{2\pi i\, e^{i\pi a} e^{-2\pi i/3}}{1 - e^{2\pi i a} e^{2\pi i/3}} \frac{e^{-i\pi a} e^{-i\pi/3}}{e^{-i\pi a} e^{-i\pi/3}} = \frac{2\pi i\, e^{-i\pi}}{e^{-i\pi a} e^{-i\pi/3} - e^{i\pi a} e^{i\pi/3}} = \frac{-2\pi i}{-2i \operatorname{sen}(\pi(a+1/3))} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(a+1/3))}$$

El resultado es manifiestamente real y positivo cuando $0 < a + 1/3 < 1$.

Para simplificar una expresión (especialmente para ver que es real) suele convenir pasar el denominador a real o a imaginario puro. Para una expresión del tipo $1/(e^{iz} \pm 1)$, en vez de multiplicar y dividir por el conjugado, es más eficiente usar $e^{iz} \pm 1 = e^{iz/2}(e^{iz/2} \pm e^{-iz/2})$ que produce el coseno o el seno de $z/2$.

E4.

a) Sea $h(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{e^z-1}$. Obtén los límites de $h(z)$ para $z \to 0$ y para $z \to \infty$, cuando existan.

b) Sea f una función holomorfa en un dominio G y tal que $a\operatorname{Re}(f(z)) + b\operatorname{Im}(f(z)) = c \quad \forall z \in G$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes y a y b no son ambos 0. Prueba que f es constante en G. Si no te sale el caso general empieza por algún caso particular tal como $a = 1$, $b = 0$.

Solución:

a) En el caso $z \to 0$ numerador y denominador se anulan. Aplicando la regla de L'Hopital se obtiene

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}-1}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{2e^{2z}}{e^z} = 2$$

En $z \to \infty$ la función e^z no tiene límite finito ni infinito. $e^z = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y))$. Sobre el eje real tiende a $+\infty$ para $z \to +\infty$ y a 0 para $z \to -\infty$ (esto es suficiente para que no haya límite en $z \to \infty$). Sobre el eje imaginario la función oscila periódicamente en $i[-1,1]$. Por tanto $e^{2z}-1$ y e^z-1 no tampoco tienen límite y no se puede aplicar L'Hopital. De hecho el límite de $h(z)$ cuando $z \to \infty$ no existe.

b) *Método directo:* $c = au + bv$, derivando alternativamente respecto de x o de y se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= au_x + bv_x \\ 0 &= au_y + bv_y \end{aligned}\right\}$$

y aplicando las ecuaciones de C-R ($u_x = v_y,\ u_y = -v_x$) para eliminar v (por ejemplo)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= au_x - bu_y \\ 0 &= au_y + bu_x \end{aligned}\right\}$$

Este sistema se puede resolver respecto de u_x y u_y. Teniendo en cuenta que por hipótesis a lo sumo uno de los dos coeficientes a o b puede ser cero, es fácil ver que la única solución es[1]

$$u_x = u_y = 0\,.$$

[1] Lo más fácil es notar que la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ es no singular ya que su determinante es $a^2 + b^2 > 0$.

Por ejemplo, si $b \neq 0$, la primera ecuación implica $u_y = au_x/b$, sustituyendo en la segunda ecuación: $0 = u_x(a^2+b^2)/b$. Dado que $a^2+b^2 \neq 0$ la única solución es $u_x = 0$ y de ahí $u_y = 0$. (Se hace igual si $a \neq 0$.)

Por C-R $u_x = u_y = 0$ implica también $v_x = v_y = 0$. Se deduce que u y v son constantes y $f(z)$ es constante.

Método alternativo: Usando C-R es inmediato que si $u_1 =$ cte y $f_1 = u_1 + iv_1$ es holomorfa entonces $v_1$también es constante, y lo mismo f_1. Para obtener nuestro resultado basta aplicar este lema a la función $f_1(z) \equiv (a-ib)f(z)$. Esta función es holomorfa y según el enunciado $au+bv = \mathrm{Re}(f_1)$ es constante por tanto $f_1(z)$ es cte y lo mismo $f(z)$.

E5. Sea la curva paramétrica $z(t) = \exp(R(e^{it} - 1))$ con $t \in [0, 2\pi]$ siendo $R > 0$. Esta curva cerrada no pasa por $z = 0$ y está contenida en el disco unidad. (a) Determina el mínimo valor de R tal que la curva no esté contenida en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$. (b) Determina el mínimo valor de R a partir del cual la curva deja de ser simple.

Solución:

Si definimos $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $z(t) = e^{-R}e^{\gamma_R(t)}$. El factor e^{-R} es un factor de escala que no afecta ni al apartado $a)$ ni al $b)$.

$a)$ La condición de que $z(t)$ esté en el semiplano derecho es que $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$, eligiendo el argumento en $[-\pi, \pi[$. Por otro lado $\arg(z) = \mathrm{Im}(\gamma_R)$. Entonces la condición se traduce en

$$-\pi/2 < \mathrm{Im}(\gamma_R) < \pi/2$$

γ_R es la circunferencia $C(0, R)$ y para que esté contenida en la banda $-\pi/2 < \mathrm{Im}(\gamma_R) < \pi/2$ es necesario y suficiente que $R < \pi/2$. Por tanto el valor pedido es $R = \pi/2$.

$b)$ Para que $z(t)$ no sea simple debe ocurrir que $z(t_1) = z(t_2)$ para ciertos $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$. Equivalentemente

$$\gamma_R(t_1) - \gamma_R(t_2) = 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z}$$

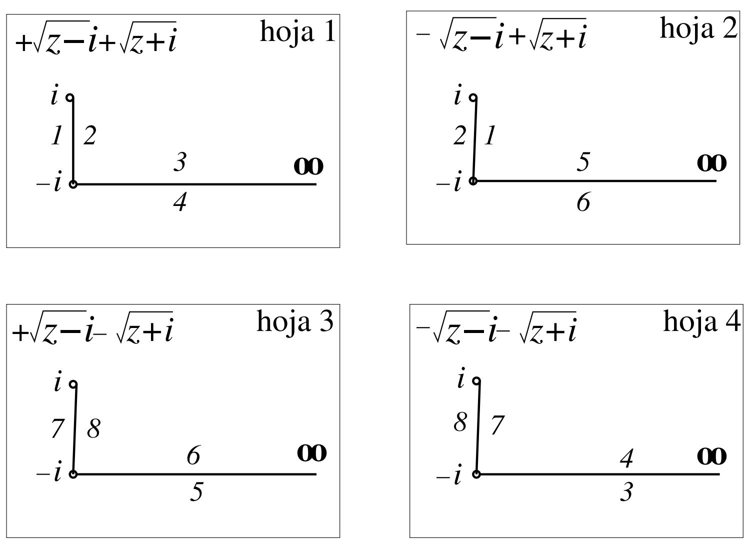
Puesto la curva γ_R es simple esto no puede ocurrir para $n = 0$. Entonces $|n| \geq 1$ y debe ocurrir que en la circunferencia haya dos puntos separados por al menos una distancia 2π. Esta condición se satisface si y sólo si $R \geq \pi$. Por tanto el valor pedido es $R = \pi$.

E6.

a) Si para la función multivaluada $f(z) = \sqrt{z-i} + \sqrt{z+i}$ se eligen los cortes de rama como los segmentos que unen $z = i$ con $z = -i$, y $z = -i$ con ∞ (concretamente a lo largo de la semirrecta $-i + \mathbb{R}_0^+$), indica cómo se identifican los 16 bordes en las cuatro hojas para formar su superficie de Riemann. (En los apuntes está hecho para cortes de rama en $\pm i + \mathbb{R}_0^+$.)
b) Para la función multivaluada $h(z) = \sqrt{z^2+1}$, sea $H(z)$ la rama que se obtiene eligiendo el corte de rama como el segmento que une los dos puntos de ramificación y $H(1) > 0$. Determina el valor de $H(-2-i)$ y justifícalo.

Solución:

a) Las hojas se pegan como se indica en la figura.



Para un z_0 cualquiera (excepto $\pm i$) se elige una de las dos raíces de $\sqrt{z_0 - i}$ que llamamos $+$ y una de las raíces de $\sqrt{z_0 + i}$ que también llamamos $+$. Los puntos z que se pueden alcanzar desde z_0 sin cruzar los cortes de rama forman la primera hoja de Riemann, $(+,+)$. Las cuatro hojas se obtienen eligiendo las raíces $\pm$ en z_0 de las cuatro formas posibles.
$z = i$ es un punto de ramificación de orden 1 (tipo raíz cuadrada) y al rodearlo $\sqrt{z-i}$ cambia de signo y se pasa de $(+,+)$ a $(-,+)$ y viceversa, o de $(+,-)$ a $(-,-)$ y viceversa. Esto explica la identificación de los dos bordes etiquetados como 1 en $(+,+)$ y $(-,+)$ y lo mismo para los etiquetados como 2. Y

análogamente para 7 y 8 en $(+,-)$ y $(-,-)$.
Al rodear $z=\infty$ necesariamente se rodea $z=\pm i$, por tanto las dos raíces $\sqrt{z\mp i}$ cambian de signo. Entonces se pasa de $(+,+)$ a $(-,-)$ y viceversa o de $(+,-)$ a $(-,+)$ y viceversa. Esto explica la identificación de los dos bordes 3 en $(+,+)$ y $(-,-)$, ídem 4, y análogamente para 5 y 6 entre $(+,-)$ y $(-,+)$.

La superficie de Riemann que se obtiene con estos cortes de rama o los de los apuntes es exactamente la misma. Son dos cartografías (ramificaciones) de un mismo terreno. La superficie de Riemann se obtiene partiendo de un z_0 y eligiendo ahí cuales son las raíces $(+,+)$ y luego llegando a todos los puntos $z\neq\pm i$ por caminos arbitrarios que no pasen por $\pm i$. Hay cuatro formas de llegar a un mismo punto (dos caminos son equivalentes si llegan al mismo valor, eligiendo las raíces por continuidad) y esas cuatro formas de llegar son las cuatro réplicas del punto z en la superficie de Riemann.

Por ejemplo, supongamos que en ambas ramificaciones (por elección de $(+,+)$ en ambos casos) el punto correspondiente a $z_0=1+2i$ de la hoja $(+,+)$ es el correspondiente a la elección $\mathrm{Re}(\sqrt{z_0\mp i})>0$. Si ahora nos movemos verticalmente hacia abajo en $\mathbb{C}$ hasta $z_1=1+i/2$ (eligiendo en todo momento las raíces por continuidad) en la ramificación del enunciado acabamos en la misma hoja $(+,+)$ mientras que en la de los apuntes acabamos en la hoja $(-,+)$ aunque son el mismo punto p_1 de la superficie de Riemann.

b) $h(1)=\pm\sqrt{2}$ y concretamente $H(1)=+\sqrt{2}$. Igualmente $H(-2-i)$ es una de las dos raíces de $(-2-i)^2+1=4(1+i)$, es decir $2^{5/4}e^{i\pi/8}$ ó $-2^{5/4}e^{i\pi/8}=2^{5/4}e^{i9\pi/8}$, a determinar. Los puntos de ramificación son $z=\pm i$ (y no ∞).

Una forma de hacer el problema es considerar un camino C que vaya de $z=1$ a $z=-2-i$ rodeando $z=-i$ por abajo (por ejemplo, en todo caso sin cruzar el corte de rama).

$$\arg(H(-2-i))=\arg(H(1))+\Delta_C\arg(H(z)),\qquad \Delta_C\arg(H(z))=\frac{1}{2}(\Delta_C\arg(z-i)+\Delta_C\arg(z+i)).$$

El argumento inicial de $H(1)$ se puede elegir como 0, y es fácil ver que

$$\Delta_C(z-i)=-\frac{\pi}{2},\qquad \Delta_C(z+i)=-\frac{5\pi}{4},$$

por tanto

$$\arg(H(-2-i))=0+\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4})=-\frac{7\pi}{8}=\quad\frac{9\pi}{8}\pmod{2\pi}$$

$H(-2-i)$ es la raíz que está en el tercer cuadrante.

$H(z)$ está bien definida. Pero supongamos que queremos una fórmula que nos proporcione el valor de $H(z)$. Definimos la función

$$(\sqrt{z})_0 = \begin{cases} 0 & & z=0 \\ \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2} & 0 \le \arg(z) < 2\pi & z \neq 0 \end{cases}$$

Esta función tiene la propiedad básica $((\sqrt{z})_0)^2 = z$, y tiene una discontinuidad en $z = t \ge 0$. La función $H_1(z) \equiv (\sqrt{z^2+1})_0$ no es $H(z)$. H_1 tiene una discontinuidad en $z^2+1 = t \ge 0$, es decir, para $z = \pm\sqrt{t-1}$. Eso incluye todo $\mathbb{R}$ (por $t \ge 1$) más el intervalo $i[-1,1]$ (por $0 \le t \le 1$). Tampoco sirve $H_2(z) \equiv (\sqrt{z-i})_0(\sqrt{z+i})_0$ que tiene cortes en $\pm i + \mathbb{R}_0^+$.

$(\sqrt{z})_0$ cambia de signo en $z = t > 0$, $(\sqrt{z \mp i})_0$ en $z \mp i = t > 0$ y $(\sqrt{-i(z \mp i)})_0$ en $-i(z \mp i) = t > 0$, es decir, en $\pm i + i\mathbb{R}_0^+$, entonces $H(z)$ se puede obtener con

$$H_3(z) = i(\sqrt{-i(z-i)})_0(\sqrt{-i(z+i)})_0$$

Es evidente que $H_3(z)^2 = z^2+1$. Esta función es holomorfa fuera del eje imaginario, también en el eje imaginario por debajo de $z = -i$, es discontinua en $i[-1,1]$ y continua otra vez en el eje imaginario por encima de $z = i$. Por tanto H_3 es H ó $-H$. Claramente $H(z)/z \to +1$ (y no -1) cuando $z \to \infty$ y $H_3(z)$ tiene la misma propiedad. (o también $H_3(1) = +\sqrt{2}$ como puede comprobarse). Por tanto $H = H_3$.

Usando este resultado

$$H(-2-i) = i(\sqrt{-2-2i})_0(\sqrt{2i})_0 = e^{i\pi/2}(2^{3/4}e^{3i\pi/8})(2^{1/2}e^{i\pi/4}) = 2^{5/4}e^{i9\pi/8}$$

Otra observación es que, como se ha dicho $H_1(z) = (\sqrt{z^2+1})_0$, cambia de signo al cruzar $i[-1,1]$ (igual que $H(z)$) y también al cruzar $\mathbb{R}$. Entonces, dado que $H_1(1+i0^+) = +\sqrt(2) = H(1)$, se deduce que $H_1(z)$ coincide con $H(z)$ para $\mathrm{Re}(z) > 0$ y con $-H(z)$ para $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Otra solución (encontrada por uno de vosotros). Si se define la función

$$(\sqrt{z})_{[-\pi,\pi)} := \begin{cases} 0 & & z=0 \\ \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2} & -\pi \le \arg(z) < \pi & z \neq 0 \end{cases}$$

Esta función cumple $\left((\sqrt{z})_{[-\pi,\pi)}\right)^2 = z$, y tiene el corte de rama en $\mathbb{R}_0^-$. Entonces

$$H_4(z) = (z+i)\left(\sqrt{\frac{z-i}{z+i}}\right)_{[-\pi,\pi)}$$

Es evidente que $H_4(z)^2 = z^2+1$, y tiene el corte en $(z-i)/(z+i) = -t$ para $t \ge 0$, es decir, $z = -i(t-1)/(t+1)$, y es fácil ver que el recorrido es $i[-1,1]$. Por tanto H_4 es $+H$ o $-H$. Como se puede comprobar $H_4(1) = +\sqrt{2}$ que implica $H_4 = +H$. Eso nos proporciona el valor pedido:

$$H_4(-2-i) = -2\left(\sqrt{\frac{-2-2i}{-2}}\right)_{[-\pi,\pi)} = -2\left(\sqrt{1+i}\right)_{[-\pi,\pi)} = -2^{5/4}e^{i\pi/8}$$

E7. Sea $I_n(R,\lambda) = \int_{\gamma_R} (z^*)^n e^{\lambda z}\, dz$ donde $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y γ_R es la circunferencia $C(i\pi, R)$, $R > 0$ y $R \neq \pi$ si $n < 0$.

a) Demuestra la fórmula

$$I_n(R,\lambda) = \int_{\gamma_R} \left(\frac{R^2}{z - i\pi} - i\pi \right)^n e^{\lambda z}\, dz.$$

b) Calcula $I_2(R,\lambda)$ usando la fórmula integral de Cauchy (generalizada).

c) Demuestra que $I_n(R,\lambda) = 0$ cuando $n < 0$ y $R > \pi$.

d) Calcula $I_{-1}(R,\lambda)$ para $R < \pi$ y particulariza el resultado para $R = \pi/2$ y $\lambda = 4/3$.

Solución:

a)

$$z \in \gamma_R \quad \Longrightarrow \quad R^2 = |z - i\pi|^2 = (z - i\pi)(z - i\pi)^* = (z - i\pi)(z^* + i\pi) \quad \Longrightarrow \quad z^* = \frac{R^2}{z - i\pi} - i\pi$$

Nótese que $(z^*)^n e^{\lambda z}$ y $\left(\frac{R^2}{z - i\pi} - i\pi \right)^n e^{\lambda z}$ son distintas funciones de z. Pero coinciden sobre γ_R y eso hace que las integrales sean iguales.

b) Desarrollando el cuadrado para $n = 2$,

$$I_2(R,\lambda) = \int_{\gamma_R} \left(\frac{R^4}{(z - i\pi)^2} - 2\pi i \frac{R^2}{z - i\pi} - \pi^2 \right) e^{\lambda z}\, dz$$

Aquí se puede aplicar la fórmula integral de Cauchy $\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, siendo C una curva suave a trozos cerrada, de índice 1 respecto de z_0, y $f(z)$ holomorfa en el interior de C y continua sobre la clausura de ese interior, y $n \in \mathbb{N}_0$. En nuestro caso $n = 1$ para el primer sumando y $n = 0$ para el segundo, con $z_0 = i\pi$ y $e^{\lambda z}$ es una función entera por lo que se aplica el teorema. El tercer sumando se anula por el teorema de la integral de Cauchy.

$$I_2(R,\lambda) = 2\pi i R^4 \lambda e^{i\pi\lambda} - (2\pi i)^2 R^2 e^{i\pi\lambda} + 0 = 2\pi i R^2 (\lambda R^2 - 2\pi i) e^{i\pi\lambda}$$

c) Una condición suficiente para que la integral se anule es que todas las singularidades del integrando estén en el exterior de γ_R. Para $n < 0$ las singularidades (del integrando en la forma del apartado a))

son los ceros de $\dfrac{R^2}{z-i\pi} - i\pi$

$$0 = \frac{R^2}{z_0 - i\pi} - i\pi \quad \Longrightarrow \quad z_0 = \frac{R^2}{i\pi} + i\pi$$

z_0 es el único punto singular del integrando. La condición para que z_0 esté fuera de γ_R es

$$R < |z_0 - i\pi| = \frac{R^2}{\pi}$$

y esto está garantizado si $R > \pi$.

$d)$ Para $n = -1$, teniendo en cuenta que $R^2 - i\pi(z - i\pi) = -i\pi(z - z_0)$, la integral puede escribirse como

$$I_{-1}(R,\lambda) = \int_{\gamma_R} \frac{z - i\pi}{-i\pi(z - z_0)} e^{\lambda z}\, dz, \qquad z_0 = \frac{R^2}{i\pi} + i\pi.$$

Se aplica la fórmula integral de Cauchy, teniendo en cuenta que z_0 está en el interior de γ_R por $R < \pi$,

$$I_{-1}(R,\lambda) = 2\pi i \frac{z_0 - i\pi}{-i\pi} e^{\lambda z_0} = 2i \frac{R^2}{\pi} e^{i\lambda(\pi - \frac{R^2}{\pi})}$$

Para $\lambda = 4/3$ y $R = \pi/2$,

$$I_{-1}(\pi/2, 4/3) = 2i \frac{\pi^2}{4\pi} e^{i4/3(\pi - \frac{\pi^2}{4\pi})} = i\frac{\pi}{2} e^{i\pi} = -i\frac{\pi}{2}$$

E8. Calcula los valores máximo y mínimo de $|z^{2n+m} + iaz^{n+m} + z^m|$ para $|z| \leq 1$, en función de $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Solución:

Veamos primero el *mínimo* de $|f(z)|$, siendo $f(z) = z^{2n+m} + iaz^{n+m} + z^m$. Claramente si $m > 0$ el mínimo es 0 porque $f(0) = 0$.

Para $m = 0$, hay dos casos. Si $n = 0$, $f(z) = 2 + ia$ es constante, el mínimo (y el máximo) de $|f(z)| = |2 + ia| = \sqrt{4 + a^2}$.

Si $n > 0$, el mínimo es 0 ya que $f(z)$ se anula en un z_0 tal que $|z_0| \leq 1$. En efecto, la ecuación $f(z) = 0$ es de segundo grado en la variable z^n,

$$0 = (z^n)^2 + ia(z^n) + 1.$$

Tiene dos soluciones, $(z^n)_+$ y $(z^n)_-$, tales que $(z^n)_+(z^n)_- = 1$, por tanto al menos una de las dos está en $|z| \leq 1$.

Para el *máximo*: como $f(z)$ es una función entera, tendrá un máximo sobre $|z| \leq 1$ en su frontera, esto es, en un z_0 tal que $|z_0| = 1$.[2] Entonces

$$|f(z_0)| = |z_0^{n+m}(z_0^n + ia + z_0^{-n})| = |z_0^n + ia + z_0^{-n}|$$

$z_0 = e^{i\theta}$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$|f(z_0)|^2 = |e^{in\theta} + ia + e^{-in\theta}|^2 = |2\cos(n\theta) + ia|^2 = 4\cos^2(n\theta) + a^2$$

El máximo se obtiene para $\cos^2(n\theta) = 1$ y corresponde a $\sqrt{4 + a^2}$, independiente de n y m.

[2] Si la función no es constante el máximo estará únicamente en la frontera, si es constante igualmente está en la frontera, así como en el interior.

E9. Sea $f(z)=\dfrac{z^2}{\operatorname{sen}^2(z)\cos(z)}$ (y $f(0)$ se define por continuidad de modo que la función es analítica en $z=0$). Determina el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z=0$ hasta orden z^2 inclusive, y también el radio de convergencia de la serie completa.

Solución:

El denominador tiene ceros dobles en $z=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$, ya que el $\operatorname{sen}(z)$ tiene un cero simple y $\cos(z)$ no se anula ahí, y $\cos(z)$ tiene cero simples en $z=(n+\frac{1}{2})\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. Dado que el numerador también tiene un cero doble en $z=0$ se deduce que la singularidad en $z=0$ es evitable y entonces la singularidad (no eludible) más próxima es la del coseno en $z=\pm\pi/2$. Por tanto el radio de convergencia es $R=\pi/2$.

En cuanto al desarrollo, en vez de derivar dos veces, lo mejor es usar redesarrollos:

$$\operatorname{sen}(z)=z-\frac{1}{3!}z^3+O(z^5),\qquad \cos(z)=1-\frac{1}{2!}z^2+O(z^4),\qquad \frac{1}{1-w}=1+w+O(w^2)$$

Entonces

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(\operatorname{sen}(z)/z)^2\cos(z)}=\frac{1}{(1-\frac{1}{6}z^2+O(z^4))^2\cos(z)}=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^2+O(z^4))(1-\frac{1}{2!}z^2+O(z^4))}\\&=\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^2+O(z^4)}=1+\frac{5}{6}z^2+O(z^4).\end{aligned}$$

La función $f(z)$ es par, su desarrollo sólo tiene potencias pares de z.

Nótese que aunque en el resultado final queremos $c_0+c_1z+c_2z^2$, en $\operatorname{sen}(z)$ tenemos que guardar hasta z^3, de otro modo se tendría:

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(\operatorname{sen}(z)/z)^2\cos(z)}=\frac{1}{(1+O(z^2))^2\cos(z)}=\frac{1}{(1+O(z^2))(1-\frac{1}{2!}z^2+O(z^4))}\\&=\frac{1}{1+O(z^2)}=1+O(z^2),\end{aligned}$$

que es correcto pero no proporciona c_2.

Otra observación: por increíble que parezca

$$(\sum_n a_n)^2 \quad \text{no es} \quad \sum_n a_n^2$$

y

$$\frac{1}{\sum_n a_n} \quad \text{no es} \quad \sum_n \frac{1}{a_n}$$

(Errores como estos se ven a menudo.)

E10. Sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(z)}$ en la corona $\pi < |z| < 2\pi$. Obtén todos los coeficientes c_n para $n < 0$. Comprueba que los coeficientes obtenidos son consistentes con la condición $\pi < |z|$.

Sugerencia: c_n se puede expresar mediante una integral. Demuestra previamente que

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{z^m}{\operatorname{sen}^2(z)}\right) = \delta_{m,1} \quad m \geq 0$$

($\delta_{n,m}$ se refiere a la delta de Kronecker.)

Solución:

Calculemos primero $\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\dfrac{z^m}{\operatorname{sen}^2(z)}\right)$ para $m \in \mathbb{N}_0$.

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2(z)} = \frac{1}{(z+O(z^3))^2} = \frac{1}{(z(1+O(z^2))^2} = \frac{1}{z^2(1+O(z^2))} = \frac{1}{z^2}(1+O(z^2)) = \frac{1}{z^2} + O(z^0)$$

Entonces el coeficiente de $\dfrac{1}{z}$ en el desarrollo de $\dfrac{z^m}{\operatorname{sen}^2(z)}$ es 1 si $m = 1$ y 0 en otro caso.

Los coeficientes del desarrollo de Laurent se pueden expresar como

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(z)} \frac{1}{z^{n+1}}\, dz, \qquad \pi < r < 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Dentro de $C(0,r)$ hay singularidades en $z = 0, \pm\pi$. Como se pide $n < 0$, introducimos $m = -n-1 = 0, 1, 2, \ldots$ Aplicando el teorema de residuos

$$c_{-m-1} = \left(\operatorname*{Res}_{z=0} + \operatorname*{Res}_{z=\pi} + \operatorname*{Res}_{z=-\pi}\right) \frac{z^m}{\operatorname{sen}^2(z)} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Si se definen las variables auxiliares $w = z \mp \pi$, $\operatorname{sen}(z) = -\operatorname{sen}(w)$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi}\left(\frac{z^m}{\operatorname{sen}^2(z)}\right) = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(\frac{(w\pm\pi)^m}{\operatorname{sen}^2(w)}\right) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\pm\pi)^{m-k}\operatorname*{Res}_{w=0}\left(\frac{w^k}{\operatorname{sen}^2(w)}\right) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\pm\pi)^{m-k}\,\delta_{k,1} = m(\pm\pi)^{m-1}$$

donde se ha aplicado el binomio de Newton. En conjunto

$$c_{-m-1} = \delta_{m,1} + m\,(1-(-1)^m)\,\pi^{m-1} = \delta_{m,1} + 2m\pi^{m-1}\,\delta_{m,\text{impar}} \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

Dado que $f(z)$ es par, el desarrollo centrado en $z = 0$ sólo tiene coeficientes pares (m impar). Y, como debe ser, los coeficientes son reales.

Se comprueba que $\overline{\lim}_{m\to+\infty}|c_{-m-1}|^{1/m} = \pi$ que implica que el desarrollo no converge a menos que $|z| > \pi$. El otro límite, $|z| < 2\pi$ lo fijan los coeficientes con $n > 0$.

E11. Calcula las integrales $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\cos(\theta)} \cos(n\theta + \operatorname{sen}(\theta))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Teniendo en cuenta que $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{\pm ix})$ para $x \in \mathbb{R}$ (se puede elegir cualquiera de los dos signos) podemos escribir

$$I_n = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-\cos(\theta)} e^{\pm i(n\theta + \operatorname{sen}(\theta))} = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-e^{\mp i\theta}} e^{\pm in\theta}$$

Se puede ahora hacer el cambio estándar $z = e^{i\theta}$, $dz = iz d\theta$, de modo que la integral es sobre z en $C(0,1)$.

Si se elige el signo de arriba

$$I_n = \operatorname{Re} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{iz} e^{-1/z} z^n = 2\pi \operatorname*{Res}_{z=0} \left(e^{-1/z} z^{n-1} \right)$$

La serie de Laurent es

$$e^{-1/z} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k z^{n-1-k} = z^{n-1} - z^{n-2} + \frac{1}{2!} z^{n-3} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} z^{n-1-k} + \cdots$$

Por tanto para $n < 0$ no hay término $1/z$ y el residuo se anula, mientras que para $n \geq 0$ el término $1/z$ corresponde a $k = n$,

$$I_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2\pi \dfrac{(-1)^n}{n!} & n \geq 0 \end{cases}$$

Alternativamente, el mismo resultado se obtiene tomando el signo de abajo,

$$I_n = \operatorname{Re} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{iz} e^{-z} z^{-n} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z=0} \left(e^{-z} z^{-n-1} \right)$$

Si $n < 0$ la función es analítica y el residuo se anula, mientras que para $n \geq 0$

$$e^{-z} z^{-n-1} = \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z^{n-k+1}} + \cdots$$

Y se obtiene lo mismo. Nótese que en realidad $\operatorname{Re}()$ no hace nada ya que $e^{-\cos(\theta)} \operatorname{sen}(n\theta + \operatorname{sen}(\theta))$ es impar en θ y su integral se anula.[3]

[3] La función es periódica por lo que se puede cambiar la integral de $[0, 2\pi]$ a $[-\pi, \pi]$.

Observación: La relación

$$\frac{1}{2\pi}I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-e^{i\theta}} e^{-in\theta} \equiv \alpha_n$$

no es más que el cálculo de los coeficientes de la serie compleja de Fourier de $e^{-e^{i\theta}}$ en el intervalo $[0,2\pi]$, en consecuencia

$$e^{-e^{i\theta}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} I_n e^{in\theta}$$

y el resultado hallado para I_n equivale a decir

$$e^{-e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{in\theta}$$

o equivalentemente

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

que es un resultado bien conocido.

E12. Sea $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^2+1}$. Calcula la convolución $(f*f)(x)$:

$a)$ Mediante integral directa usando la definición de convolución.

$b)$ Mediante transformada de Fourier. Se puede hacer reciclando resultados ya obtenidos en los apuntes, sin calcular ninguna integral.

Solución:

$a)$ Por definición de convolución

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\frac{1}{(x-y)^2+1}\,dy\,.$$

Esta integral se puede calcular por el teorema de residuos cerrando por el semiplano superior, por ejemplo, y aplicando el lema 1. Las singularidades encerradas por contorno son polos simples en $z=i$ y $z=x+i$,

$$\begin{aligned}
(f*f)(x) &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} + \operatorname*{Res}_{z=x+i}\right)\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{z^2+1}\frac{1}{(x-z)^2+1}\\
&= \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{2z}\frac{1}{(x-z)^2+1}\Big|_{z=i} + \frac{1}{z^2+1}\frac{1}{2(z-x)}\Big|_{z=x+i}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(x-i)^2+1} + \frac{1}{(x+i)^2+1}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x^2-2ix} + \frac{1}{x^2+2ix}\right) = \frac{1}{\pi x}\left(\frac{2x}{x^2+4}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

$b)$ Como sabemos

$$\mathscr{F}\{e^{-a|x|}\}(k) = \frac{2a}{k^2+a^2}, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{\frac{1}{k^2+a^2}\}(x) = \frac{1}{2a}e^{-a|x|} \qquad a>0$$

Teniendo en cuenta que $\mathscr{F}^{-1}\{F(k)\}(x) = \dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{F(k)\}(-x)$, se deduce

$$\mathscr{F}\{\frac{1}{x^2+a^2}\}(k) = \frac{\pi}{a}e^{-a|k|}, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{e^{-a|k|}\}(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{k^2+a^2}$$

Y en particular, $F(k) = e^{-|k|}$.

Aplicando la propiedad $\mathscr{F}\{f_1 * f_2\}(k) = F_1(k)F_2(k)$, se obtiene entonces

$$(f*f)(x) = \mathscr{F}^{-1}\{F^2(k)\} = \mathscr{F}^{-1}\{e^{-2|k|}\} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4}.$$