GRUPOS CONTINUOS

L. L. Salcedo
Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear,
Universidad de Granada, E-18071 Granada, Spain
E-mail: salcedo@ugr.es

29 de julio de 2020

Resumen

Versión v2.2.4 1994-2014.
Se ruega comunicar los errores o imprecisiones que puedan encontrarse.
`http://www.ugr.es/local/salcedo/public/mt3/curso.pdf`

Índice general

1. Conceptos topológicos. Definiciones topológicas. (topología, etc, variedades.) Ejemplos: topologías de $\mathbb{R}$, $\mathrm{U}(1)$ y $\mathrm{SU}(2)$.

2. Grupos continuos. Definición de grupo continuo. Subgrupo. Homomorfismo. Ejemplo: $\mathbb{R}$ en $\mathrm{SO}(2)$. Isomorfismo. Ejemplo: $\mathrm{SO}(2)$ en $\mathrm{U}(1)$. Definición de grupo de Lie. Ejemplo: $\mathrm{SU}(2)$.

3. Propiedades globales de grupos I. Conexión. Ejemplos: $\mathrm{SO}(2)$ y $\mathrm{O}(2)$.

4. Concepto de isomorfismo local. Homomorfismos locales. Isomorfismos locales. Ejemplo: $\mathrm{U}(1)$ y $\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}(3)$ y $\mathrm{SU}(2)$.

5. Propiedades globales de grupos II: Grupo fundamental. Recubridor universal. Extensión de homomorfismos locales. Multivaluación. Ejemplo: $\mathrm{U}(1)$ y $\mathbb{R}$, $\mathrm{SO}(3)$ y $\mathrm{SU}(2)$.

6. Grupos de Lie lineales.

7. Definición de álgebra de Lie. Teorema de Ado. Homomorfismos de álgebras. Representación adjunta. Ejemplos: $\mathrm{su}(2)$, paréntesis de Poisson en polinomios de q, p de grado dado.

8. Coordenadas locales. Ley de composición. Ejemplo: $\mathrm{U}(1)$ y $\mathrm{SU}(2)$.

9. Álgebra de Lie de un grupo de Lie. Espacio tangente. Coordenadas canónicas. Relación biunívoca entre grupo de Lie local y álgebra de Lie. Relación subgrupos locales y subálgebras.

10. Funciones de matrices cuadradas. Forma de Jordan. Fórmula de Campbell-Hausdorff. Exponencial de los elementos infinitesimales.

11.Álgebras de Lie de grupos de Lie lineales. Homomorfismos locales de grupos y homomorfismos de álgebras. Representación adjunta del grupo. Ej. $\mathrm{U}(1)$, $\mathrm{SU}(2)$ (eje-ángulo)

12. Grupos de transformaciones. Generadores infinitesimales.

13. Medidas invariantes. Teorema de Peter-Weyl. Medida invariante de $\mathrm{SU}(2)$. Medidas invariantes de grupos de matrices.

14. Álgebras de Lie. Estructura de álgebras, álgebras simples, representaciones de álgebras semisimples complejas.

1 Conceptos topológicos

Definición. (Espacio topológico.) Un espacio topológico es un par (X,τ) formado por un conjunto X y una colección τ de subconjuntos de X, tal que

1) $\emptyset$, $X \in \tau$,

2) si $U_1, U_2 \in \tau$, $U_1 \cap U_2 \in \tau$,

3) si $\forall i \in I\ U_i \in \tau$, $\cup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Frecuentemente se hace referencia a X como el espacio topológico.

Los elementos del espacio topológico se denominan puntos y τ es su topología.

Definición. (Conjuntos abiertos y cerrados.) Los conjuntos pertenecientes a la topología τ se denominan abiertos. Sus complementarios se denominan cerrados.

A partir de ahora sólo consideraremos topologías en las que un punto forme un conjunto cerrado.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico con la topología usual (la generada por los intervalos abiertos).

Ejemplo. Un conjunto finito X es un espacio topológico con la topología discreta. (La topología discreta de X es aquella en la que todos los subconjuntos de X son abiertos por definición.)

Definición. (Adherencia.) La adherencia $\bar{A}$ de un conjunto $A \subseteq X$ es la intersección de los conjuntos cerrados que contienen a A.

Definición. (Entorno de un punto.) Un entorno abierto de un punto x es todo abierto que contenga al punto x. Un entorno de x es todo conjunto que contenga un entorno abierto de x.

Definición. (Subespacio topológico.) Un subespacio topológico Y de un espacio topológico X es todo subconjunto dotado con la topología inducida por X, a saber, los abiertos de Y son los conjuntos $Y \cap U$, donde U es cualquier abierto de X.

Definición. (Base de una topología.) Una colección de abiertos no vacíos Σ es una base de la topología τ si todo abierto no vacío es unión de abiertos en Σ.

Ejemplo. El conjunto de bolas abiertas es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Definición. (Producto de espacios topológicos.) El producto topológico de dos espacios X_1 y X_2 es el conjunto $X_1 \times X_2$ tomando como base de su topología el conjunto de productos cartesianos de abiertos de X_1 y X_2.

Definición. (Punto aislado.) Un punto x de X es aislado si admite un entorno con x como único elemento. Un punto x de $A \subseteq X$ es un punto aislado de A si lo es como subespacio topológico.

Definición. (Conjunto discreto.) Un conjunto $A \subseteq X$ es discreto si está formado por puntos aislados.

Definición. (Límite.) Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice que converge a x o que tiene por límite x si para todo entorno abierto U de x existe un número natural N tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$.

Definición. (Aplicación abierta.) Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y f una aplicación de X_1 en X_2. Se dice que f es una aplicación abierta si la imagen de todo abierto de X_1 es un abierto de X_2.

Definición. (Aplicación continua.) Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y f una aplicación de X_1 en X_2. Se dice que f es continua si la preimagen de cualquier abierto de X_2 es un abierto de X_1.

Definición. (Homeomorfismo.) Una aplicación f es un homeomorfismo (o aplicación topológica) de X_1 en X_2 si f es biyectiva y f y f^{-1} son continuas. Dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Por definición, las propiedades topológicas son aquellas que son invariantes bajo homeomorfismos. Dos espacios homeomorfos son topológicamente equivalentes.

Ejemplo. $\mathbb{C}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo. Los intervalos abiertos son homeomorfos entre sí y a $\mathbb{R}$.

Ejemplo. La biyección $f : x \in [0,1[\mapsto \exp(2\pi i x) \in \mathrm{U}(1)$ es continua pero no bicontinua (al moverse de forma continua hacia $\omega = 1$ de $\mathrm{U}(1)$ por x crecientes, ω llega a 1 pero x pega un salto a 0. Notar que $[0,x[= [0,1[\cap]-1,x[$, con $0 < x < 1$ es un abierto de $[0,1[$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y su imagen por f no es un abierto de S^1, luego f no es abierta y f^{-1} no es continua). Los espacios no son homeomorfos y por tanto son topológicamente inequivalentes.

Nótese que los conceptos de aplicación continua y de homeomorfismo en espacios topológicos son paralelos a los de homomorfismo e isomorfismo en estructuras algebraicas (grupos, anillos, etc).

Definición. (Topología cociente.) Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. El conjunto cociente $Y = X/\sim$ (es decir, el conjunto de las clases de equivalencia de $\sim$) admite en forma natural la llamada topología cociente: un conjunto U de Y es abierto si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X, siendo $\pi : X \to Y$ la proyección canónica $(x \mapsto \mathrm{clase}(x))$. Por construcción π es una aplicación continua.

Ejemplo. Sea X el intervalo cerrado $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, y sea $\sim$ la identificación de 0 con 1, es decir, 0 y 1 forman la misma clase y todos los demás clases sólo tienen un elemento. El espacio cociente es homeomorfo a S^1 ya que 0 y 1 están identificados y un entorno de 0 es también un entorno de 1.

Definición. (Recubrimiento.) Un recubrimiento (abierto) de un conjunto es toda colección de abiertos cuya unión contiene al conjunto.

Definición. (Espacio compacto.) Un espacio topológico X es compacto si todo recubrimiento de X contiene un subrecubrimiento finito. Un subconjunto A es compacto si lo es como subespacio topológico de X.

Definición. (Espacio localmente compacto.) Un espacio topológico es localmente compacto si todo punto admite un entorno compacto.

Nótese que compacto implica localmente compacto.

Teorema. Bajo una aplicación continua la imagen de un conjunto compacto es un conjunto compacto.

Ejemplo. Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, además es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Ejemplo. Todo conjunto finito es compacto.

Ejemplo. Un espacio de Hilbert de dimensión infinita no es localmente compacto ni por tanto compacto.

Definición. (Espacio conexo.) Un espacio topológico X es conexo si no es la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. Un conjunto A es conexo si lo es como subespacio topológico de X.

Definición. (Espacio localmente conexo.) Un espacio es localmente conexo si todo punto admite un entorno conexo.

Nótese que conexo implica localmente conexo.

Teorema. Bajo una aplicación continua la imagen de un conjunto conexo es un conjunto conexo.

Definición. (Componente.) La componente de un punto $x \in X$ es el mayor conjunto conexo que lo contiene (coincide con la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x). El conjunto $\Pi_0(X)$ de componentes define una partición del espacio de X.

Las componentes son a la vez conjuntos abiertos y cerrados.

Definición. (Variedad topológica.) Un espacio M (con base numerable) es una variedad topológica n-dimensional si admite un recubrimiento $\mathscr{A}$ tal que todo $U \in \mathscr{A}$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. También se dice que M es localmente euclídeo. Trivialmente, una variedad es localmente compacta y localmente conexa. Los homeomorfismos (y por extensión sus dominios) se denominan cartas locales y el recubrimiento recibe el nombre de atlas de M. Identificando $\mathbb{R}^0$ con $\{0\}$, se tiene en particular que los espacios discretos son variedades de dimensión 0.

Se definen análogamente las variedades topológicas sobre los complejos, que equivalen a variedades reales de dimensión doble.

Las distintas variedades de igual dimensión son localmente idénticas desde el punto de vista topológico (a saber, como $\mathbb{R}^n$) y sólo se distinguen por sus propiedades globales.

Ejemplo. El intervalo $[0,1[$ no es una variedad topológica ya que en 0 no es homeomorfo a una abierto de $\mathbb{R}$. ($[0,1[$ es una variedad con borde.)

Ejemplo. Son variedades n-dimensionales $\mathbb{R}^n$ y la bola abierta $\{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| < 1\}$ y además estos dos espacios son homeomorfos entre sí.

Ejemplo. La esfera n-dimensional S^n es la clase de variedades homeomorfas a $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}, ||x|| = 1\}$. En particular S^1 es una circunferencia y S^2 es la superficie de una esfera en $\mathbb{R}^3$. S^n es conexa para todo $n \geq 1$ y compacta (ya que es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^{n+1}$) y por tanto no es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Nótese que $\mathbb{R}^n$ requiere un atlas con una sola carta local, en cambio S^n requiere más de una carta local ya que un abierto que recubra toda la esfera debe ser el propio espacio S^n que no es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un atlas para la esfera es el formado por $\mathrm{S}^n - \{x_0\}$ donde x_0 es el polo norte y el homeomorfismo es la proyección estereográfica más otra carta que contenga a x_0.

Definición. (Variedad diferenciable.) Una variedad topológica es una variedad diferenciable si admite un atlas tal que los cambios de coordenadas entre cartas (cuando sus dominios tengan intersección no nula) sean funciones diferenciables. Análogamente se definen las variedades analíticas.

2 Grupos continuos

Definición. (Grupo continuo.) Un conjunto G es un grupo continuo (o también un grupo topológico) si

1) G es un grupo en sentido algebraico (también llamado grupo abstracto).

2) G es un espacio topológico.

3) La aplicación $\begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$ es continua.

En particular esto implica que xy y x^{-1} son funciones continuas de x,y. Se puede probar (usando la traslación por la izquierda T^L introducida más abajo) que 1) $(x,y)\mapsto xy$ y $x\mapsto x^{-1}$ son aplicaciones abiertas y 2) si $A\subseteq G$ y U abierto de G, los conjuntos AU y UA son también abiertos.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ con la suma es un grupo continuo con la topología usual, ya que es un grupo con la suma y $x-y$ es una función continua de $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Todo grupo finito G es un grupo continuo con la topología discreta en G.

Ejemplo. El grupo $\mathrm{U}(1)=\{w\in\mathbb{C},|w|=1\}$ tiene la topología de S^1 (circunferencia).

Ejemplo. $\mathrm{GL}(n),\mathbb{R})$ es un grupo continuo con la topología inducida por $\mathbb{R}^{n^2}$. Ídem $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ con la topología inducida por $\mathbb{C}^{n^2}$ (o equivalentemente $\mathbb{R}^{2n^2}$).

Definición. (Espacios homogéneos.) Un espacio X es homogéneo si $\forall x,y\in X$ existe un homeomorfismo $f:X\to X$ tal que $f(x)=y$. Es decir, todos los puntos son topológicamente equivalentes.

Ejemplo. $\mathrm{U}(1)$ (o S^1) es un espacio homogéneo, en cambio $[0,1[$ no lo es (ya que 0 es un punto especial) y por ello no pueden ser homeomorfos.

Teorema. Los grupos continuos son espacios topológicos homogéneos.

En efecto, la *traslación por la izquierda* $T_a^L x = ax$ es un homeomorfismo de G en G y para todo par de puntos x, y existe una traslación que los relaciona $T_a^L x = y$, a saber $a = yx^{-1}$. $\diamondsuit$

Esto quiere decir que todos los elementos de un grupo continuo son topológicamente (aunque no algebraicamente) indistinguibles. En particular las propiedades topológicas locales son las de un entorno del elemento neutro.

Definición. (Subgrupo de un grupo continuo.) H es un subgrupo de un grupo continuo G si lo es en sentido abstracto y además es cerrado.

Se puede probar que si H es subgrupo abstracto de G su adherencia $\bar{H}$ es un subgrupo (continuo). Si H es un subgrupo invariante su adherencia también.

Ejemplo. $\mathrm{U}(1)$ es subgrupo de $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$. $\mathbb{R}$ es subgrupo de $\mathbb{R}^2$.

Teorema. Si G es un grupo continuo y H un subgrupo, las clases de congruencia gH, $g \in G$ son homeomorfas entre sí.

En efecto, sea $f_g : H \to gH$ definida por $h \mapsto gh$. f_g es biyectiva y bicontinua (ya que $f_g^{-1} = f_{g^{-1}}$) luego es un homeomorfismo. $\diamondsuit$

Teorema. Si H es un subgrupo del grupo continuo G, el conjunto cociente G/H es un espacio homogéneo con la topología cociente.

Definición. (Homomorfismo.) Una aplicación entre grupos continuos es un homomorfismo de grupos continuos si 1) es un homomorfismo de grupos abstractos y 2) es una aplicación continua.

Ejemplo. La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$, definida por $f(x) = \exp(ix)$ es un homomorfismo de grupos continuos, ya que $\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)$.

Definición. (Isomorfismo.) Una aplicación entre grupos continuos es un isomorfismo de grupos continuos si 1) es un isomorfismo de grupos abstractos y 2) es un homeomorfismo. Los grupos continuos son entonces isomorfos. Esta es una relación de equivalencia.

Ejemplo. $\mathrm{SO}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), A^T A = E, \det(A) = 1\}$. Estas matrices son de la forma $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ con θ definido módulo 2π. $\mathrm{SO}(2)$ es isomorfo a $\mathrm{U}(1)$ con $A \mapsto \exp(i\theta)$, es decir, $\mathrm{U}(1)$ es una representación fiel de $\mathrm{SO}(2)$ y viceversa.

Definición. (Grupo cociente.) Sea G grupo continuo y N un subgrupo invariante. El grupo cociente G/N es el grupo cociente abstracto dotado con la topología cociente. La proyección canónica es continua y abierta.

Teorema. Si f es un homomorfismo abierto de G en G^*, entonces su núcleo N es un subgrupo continuo invariante de G, su imagen H^* es un subgrupo continuo de G^* y G/N es isomorfo a H^* por el isomorfismo canónico.

Definición. (Grupo de Lie.) Un grupo de Lie es un grupo continuo cuyo espacio es una variedad topológica. La dimensión del grupo es la dimensión de la variedad.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ con la suma es un grupo de Lie. Ídem $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$.

Ejemplo. Los grupos discretos son grupos de Lie de dimensión 0. (Un grupo G es discreto cuando es completamente disconexo, es decir, las componentes están formadas por un solo elemento.)

Ejemplo. El grupo de transformaciones de gauge: $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ no es de Lie ya que no es localmente compacto (tiene dimensión infinita). Tiene subgrupos de dimensión finita que son de Lie.

Ejemplo. (Grupo $\mathrm{SU}(2)$.) El grupo $\mathrm{SU}(2)$ está formado por

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), A^\dagger A = E, \det(A) = 1\}\,. \tag{2.1}$$

La condición de unitaridad, $A_{ik}A^*_{jk} = \delta_{ij}$ implica

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\omega b^* & \omega a^* \end{pmatrix}, \quad a,b,\omega \in \mathbb{C},\ |\omega| = 1, |a|^2 + |b|^2 = 1\,. \tag{2.2}$$

Estas matrices forman el grupo $\mathrm{U}(2)$. La condición $\det A = 1$ implica $\omega = 1$ y por tanto

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Las matrices también pueden escribirse en la forma

$$A = \begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & -x_2 - ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^4,\ ||x|| = 1\,, \tag{2.4}$$

es decir, $A = x_0 - i\vec{x}\cdot\vec{\sigma}$, donde σ_i son las matrices de Pauli y $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ y la restricción $x_0^2 + \vec{x}^2 = 1$. Por tanto, $\mathrm{SU}(2)$ tiene la topología de S^3. Es un grupo de Lie de dimensión 3, compacto, conexo y simplemente conexo.

Teorema. Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo del grupo continuo G, H es también grupo de Lie. Si H es invariante, G/H también es un grupo de Lie.

3 Propiedades globales de grupos I

Definición. (Camino.) Sea X un espacio topológico. Un camino en X es una aplicación continua $f : [0,1] \to X$. Los puntos $f(0)$ y $f(1)$ se denominan extremos inicial y final del camino. Cuando $f(t) = x$ (x un punto independiente de t) se dice que f es un camino nulo. Cuando $f(0) = f(1)$ se dice que el camino es *cerrado*. Los caminos cerrados son aplicaciones continuas de S^1 en X.

Definición. (Puntos homotópicos.) Sea X un espacio topológico. Se dice que dos puntos $x_1, x_2 \in X$ son homotópicos o deformables uno en otro si existe un camino que los une. Para espacios localmente euclídeos equivale a decir que están en la misma componente conexa de X ya que los conceptos de conexo y arcoconexo coinciden (en general, arcoconexo implica conexo pero no al revés). Esta es una relación de equivalencia y $\Pi_0(X)$ (el conjunto de componentes) es el conjunto cociente.

Sea G un grupo continuo con componentes G_i, $i \in I$, siendo G_0 la componente del elemento neutro, $e \in G_0$.

Teorema. G_0 es un subgrupo invariante de G.

En efecto, sean g_1, g_2 dos elementos cualesquiera de G_0 y sean $f_{1,2}$ dos caminos con origen e y extremos $g_{1,2}$, entonces $f_1 f_2^{-1}$ es un camino que une e con $g_1 g_2^{-1}$ que por tanto es de G_0 y éste es subgrupo. Si $g \in G$ cualquiera, $g f_1 g^{-1}$ define una deformación de $g g_1 g^{-1}$ a e, luego $g g_1 g^{-1} \in G_0$ y éste es invariante. $\diamondsuit$

Teorema. El conjunto cociente G/G_0 coincide con $\Pi_0(G)$, que por tanto es un grupo homomorfo a G. Además, las componentes de G son homeomorfas a G_0.

En efecto, si $g \in G_k$, y $h \in G_0$, $gh \in G_k$ porque al deformar h a e, gh se deforma a g, de donde $gG_0 \subseteq G_k$. Por otro lado si $g' \in G_k$, g' es deformable a g y $g^{-1}g'$ es deformable a e luego $g^{-1}g' \in G_0$ y $g' \in gG_0$, es decir, $G_k \subseteq gG_0$. Las clases de congruencia de grupos continuos son homeomorfas entre sí. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Grupo $\mathrm{O}(2)$.) El grupo $\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), A^T A = E\}$. Los elementos pueden parametrizarse como

$$A(\theta,\eta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\eta \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \eta\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}\ (\text{mód} 2\pi),\ \eta = \pm 1\,, \tag{3.1}$$

es inmediato que $\det(A) = \eta$, por tanto las matrices con determinante $+1$, que forman el conjunto $\mathrm{O}^+(2) = \mathrm{SO}(2)$ y las de determinante -1, el conjunto $\mathrm{O}^-(2)$ están en distintas componentes conexas de $\mathrm{O}(2)$, ya que no pueden conectarse continuamente. El conjunto $\mathrm{SO}(2)$ tiene la topología de S^1 luego es conexo, es la componente del neutro y forma un subgrupo invariante de $\mathrm{O}(2)$. De hecho $\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \otimes_s \mathbb{Z}_2$, ya que $A(\theta,\eta) = A(\theta,1)A(0,\eta)$, es decir, $\mathrm{O}(2)/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{Z}_2$ y el grupo $\Pi_0(\mathrm{O}(2))$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. El homomorfismo de $\mathrm{O}(2)$ en $\mathbb{Z}_2$ es $A \mapsto \det(A)$. La otra componente, $\mathrm{O}^-(2)$, (que no forma un subgrupo) tiene la misma topología, S^1. $\diamondsuit$

4 Concepto de isomorfismo local

Teorema. En un grupo continuo conexo, cualquier entorno abierto U del neutro genera todo el grupo, es decir, todo elemento de G es el producto de un número *finito* de elementos de U.

En efecto, se puede probar que el producto algebraico de abiertos es abierto. Sea V la unión de todos los abiertos U^n, $n = 1,2,\dots$. V es abierto. Si $g \in \bar{V}$, gU^{-1} es un abierto con intersección no nula con V luego $g \in VU = V$, luego V es abierto y cerrado, así como su complementario W, de donde $G = V \cup W$ y W debe ser vacío por ser G conexo. $\diamondsuit$

Definición. (Homomorfismo local.) Un homomorfismo local entre grupos continuos G_1 y G_2 es toda aplicación continua f de un entorno abierto U del neutro de G_1 en un abierto de G_2 tal que $f(ab) = f(a)f(b)$ siempre que a, b y ab estén en U.

Notas. 1) $a, b \in U$ no implica $ab \in U$. En general U y $f(U)$ no forman subgrupos. 2) U y $f(U)$ contienen al neutro de G_1 y G_2 respectivamente y tomando U suficientemente pequeño se puede elegir $U = U^{-1}$ (y lo mismo $f(U)$). 3) El homomorfismo local f puede no estar definido fuera de U; todo homomorfismo (global) define uno local, pero no necesariamente al contrario.

Definición. (Isomorfismo local.) Un isomorfismo local entre grupos continuos G_1 y G_2 es todo homeomorfismo f entre entornos abiertos de los neutros de G_1 y G_2 tal que $f(ab) = f(a)f(b)$, siempre que a, b y ab pertenezcan al dominio de f. Los grupos son entonces localmente isomorfos.

Teorema. Sea G un grupo continuo conexo y N un subgrupo invariante discreto, entonces: a) N es central. (Un subgrupo es central cuando sus elementos conmutan con todos los del grupo.) b) G/N es localmente isomorfo a G.

En efecto, a) sea $h \in N$ y $g \in G$ cualesquiera. El elemento ghg^{-1}, que es de N por ser N invariante, es deformable a h dentro de N (puesto que g es deformable a e), luego h y ghg^{-1} están en la misma componente conexa de N pero entonces deben coincidir por ser N discreto; N es central. b) La proyección $\pi : G \to G/N$ definida por $\pi(g) = gN$ es un homomorfismo sobreyectivo. Basta probar que π es localmente invertible. Sean g_1, g_2 próximos a la identidad y $\pi(g_1) = \pi(g_2)$. Entonces, existe un h de N tal que $g_1 = hg_2$. Por continuidad h también será próximo a la identidad, pero como N es discreto, debe ser $h = e$ y $g_1 = g_2$, luego π es invertible en un entorno de la identidad y define un isomorfismo local. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $\mathrm{U}(1)$.)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$ el homomorfismo definido por $f(x) = \exp(2\pi i x)$. f no es un isomorfismo ya que no es invertible. $\mathbb{R}$ y $\mathrm{U}(1)$ son grupos de Lie de dimensión 1 por lo que son localmente homeomorfos pero no son homeomorfos globalmente. Consideremos f restringido al abierto $U =]-a, a[$, con $a < 1/2$. Esto define un isomorfismo local (ya que $f(U)$ es un abierto de $\mathrm{U}(1)$ homeomorfo a U). Por tanto, $\mathbb{R}$ y $\mathrm{U}(1)$ son localmente isomorfos pero no globalmente isomorfos. Notar que f define una representación unitaria unidimensional de $\mathbb{R}$ que es localmente fiel pero globalmente degenerada.

El núcleo de f es $(\mathbb{Z}, +)$, que es un subgrupo invariante discreto de $(\mathbb{R}, +)$ y central (notar que $\mathbb{R}$ es abeliano y todos sus subgrupos son invariantes y centrales). Además f es sobreyectiva, es decir, $f(\mathbb{R}) = \mathrm{U}(1)$. Se deduce que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathrm{U}(1)$ y de acuerdo con el teorema $\mathbb{R}$ y $\mathrm{U}(1)$ son localmente isomorfos. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Grupos $\mathrm{SO}(3)$ y $\mathrm{SU}(2)$.)

El grupo $\mathrm{SO}(3)$ se define como $\{A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}), A^T A = E,\ \det(A) = 1\}$. Es inmediato comprobar que estas matrices forman un grupo con la multiplicación con $e = E$, la matriz identidad, y $A^{-1} = A^T$. Este grupo coincide con el de rotaciones, es decir, aplicaciones $\begin{array}{c} R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto Rx \end{array}$ tales que

1) R es lineal

2) conserva la norma euclídea: $||Rx|| = ||x||$.

3) conserva la orientación de la base.

Las transformaciones que cumplen 1) y 2) transforman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en otra y forman el grupo $\mathrm{O}(3)$. Los elementos que no cumplen 3) se denominan rotaciones impropias. Son el producto de una rotación y una reflexión. Las rotaciones transforman una base ortonormal en otra con la misma orientación.

Sea $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (dotado del producto escalar usual). La condición 1) permite asociar a cada R una matriz R_{ij} de modo que $(Rx)_i = R_{ij}x_j$. (Notar que la métrica es δ_{ij} y por tanto no hay diferencia entre componentes covariantes y contravariantes, $x_i = g_{ij}x^j = x^i$.) La condición 2) equivale a conservar el producto escalar y por tanto puede expresarse como

2′) $R_{ik}R_{j\ell}\,\delta_{k\ell} = \delta_{ij}$ que expresa $R^TR = E$. De aquí que $\det(R) = \pm 1$.

La condición 3) quiere decir por definición que $\det(R) > 0$, y por tanto $1 = \det(R) = R_{1i}R_{2j}R_{3k}\,\varepsilon_{ijk}$. Dado que ε_{ijk} es un tensor completamente antisimétrico de rango 3 en un espacio de dimensión 3, se deduce que

3′) $R_{i\ell}R_{jm}R_{kn}\,\varepsilon_{\ell mn} = \varepsilon_{ijk}$

Las condiciones 2′) y 3′), expresan que las rotaciones también pueden definirse como las transformaciones lineales que dejan invariantes los tensores δ_{ij} y ε_{ijk}. Esto equivale a decir que conservan el producto escalar y vectorial:

$$(Rx)\cdot(Ry) = x\cdot y\,, \qquad (Rx)\times(Ry) = R(x\times y)\,. \tag{4.1}$$

Se puede probar que no hay otros tensores invariantes bajo rotaciones (excepto los formados con estos mediante producto tensorial).

Veamos que hay un homomorfismo sobreyectivo de $\mathrm{SU}(2)$ en $\mathrm{SO}(3)$ que es un isomorfismo local aunque no global. Para ello definamos una representación de $\mathrm{SU}(2)$ en $\mathbb{R}^3$ (llamada representación adjunta de $\mathrm{SU}(2)$). Sea L el conjunto de matrices 2×2 (complejas) antihermíticas y de traza nula. Las matrices E, σ_1, σ_2 y σ_3 forman una base del conjunto de matrices A 2×2 complejas, $A = x_0E + x_k\sigma_k$, con $\mathrm{tr}(A) = 2x_0$ y $A^\dagger = x_0^*E + x_k^*\sigma_k$, por tanto $L = \{X = ix_k\sigma_k, x\in\mathbb{R}^3\}$ y L es un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^3$. La representación adjunta π la definimos como $\pi(g): L\to L$ con $X\mapsto\pi(g)(X) = gXg^{-1}$. Es inmediato que es lineal y que $\pi(g)(X)\in L$ por la propiedad cíclica de la traza y $g^\dagger = g^{-1}$. También es una representación de $\mathrm{SU}(2)$ ya que

$$(\pi(g_1)\pi(g_2))(X) = g_1(g_2Xg_2^{-1})g_1^{-1} = \pi(g_1g_2)(X)\,. \tag{4.2}$$

Demostremos que además $\pi(g)$ es de $\mathrm{SO}(3)$. Para ello basta notar que $\det(X) = ||x||^2$ y que por la propiedad cíclica del determinante $\det(\pi(g)(X)) = \det(X)$. Esto implica que $\pi(g)$ es de $\mathrm{O}(3)$ y por continuidad con $E = \pi(E)$, que es de $\mathrm{SO}(3)$. La demostración de que π es sobreyectivo se hará más adelante después de introducir las parametrizaciones eje-ángulo en $\mathrm{SU}(2)$ y $\mathrm{SO}(3)$.

El núcleo de π es $\mathbb{Z}_2 = \{E, -E\}$. En efecto, si $\pi(g) = E$, $\forall X \in L$, $[g, X] = 0$. Como, $\{\sigma_i, i = 1,2,3\}$ forma un conjunto irreducible de matrices (no tienen un vector propio común) se deduce que $g = \lambda E$ y $\det(\lambda E) = \lambda^2$ implica $g = \pm E$. Por el teorema general, $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathrm{SO}(3)$. Además $\mathbb{Z}_2$ es un subgrupo invariante discreto de $\mathrm{SU}(2)$ que es central (de hecho es el centro de $\mathrm{SU}(2)$) y $\mathrm{SO}(3)$ es localmente isomorfo a $\mathrm{SU}(2)$. Globalmente $\mathrm{SO}(3)$ es una imagen homomorfa de $\mathrm{SU}(2)$ con dos elementos de $\mathrm{SU}(2)$, $\pm g$ por cada rotación $R = \pi(\pm g)$. $\diamondsuit$

5 Propiedades globales de grupos II

Sea X un espacio topológico conexo.

Definición. (Caminos homotópicos.) Se dice que dos caminos u_1, u_2 en X son homotópicos u homotópicamente equivalentes si:

1) Tienen el mismo origen y el mismo extremo, es decir, $u_1(0) = u_2(0)$ y $u_1(1) = u_2(1)$.

2) Uno es deformable continuamente en el otro, es decir, existe una aplicación continua $f : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $f(t,0) = u_1(t)$ y $f(t,1) = u_2(t)$.

Esta es una relación de equivalencia que clasifica los caminos en clases de homotopía, $[u]$.

Definición. (Caminos cerrados triviales.) Se dice que un camino cerrado con extremos a es homotópicamente trivial si es homotópico al camino nulo en a, es decir, si se puede contraer a un punto.

Definición. (Composición de caminos.) Sean u y v dos caminos. Se define u^{-1} como el camino u recorrido en sentido contrario, es decir, $u^{-1}(t) = u(1-t)$. Si el extremo de u es el origen de v, se define $u * v$ como el camino obtenido recorriendo primero u y luego v, es decir, $(u*v)(t) = \begin{cases} u(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ v(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$.

Se prueba que la composición de caminos tiene las siguientes propiedades:

1) Es asociativa.

2) $u * u^{-1}$ es un camino cerrado homotópicamente trivial.

3) u_1 y u_2 son homotópicos si y sólo si $u_1 * u$ y $u_2 * u$ lo son.

Teorema. Dos caminos u y v de a a b son homotópicos si y sólo si $v * u^{-1}$ es un camino cerrado homotópicamente trivial.

En efecto, ya que v es homotópico a u si y sólo si $v * u^{-1}$ lo es a $u * u^{-1}$ y este último es un camino cerrado homotópicamente trivial. $\diamondsuit$

Teorema. El número de clases de homotopía de caminos con origen a y extremo b no depende de a y b.

En efecto, es evidente por continuidad en los extremos y teniendo en cuenta que X es conexo. Más en detalle: Denotemos las clases de homotopía de caminos de a a b por $\Pi(X;a,b)$ y sea u_0 un camino fijo de a a b. Veamos que hay una biyección de $\Pi(X;a,b)$ en $\Pi(X;a,a)$ definida por $[u] \mapsto [u * u_0^{-1}]$. Esta aplicación está bien definida ya que no depende del representante elegido (propiedad 3 de la composición). Es inyectiva también por la propiedad 3. Es sobreyectiva ya que para todo camino cerrado γ de a a a, $[\gamma * u_0]$ es la preimagen de $[\gamma]$. Por la propiedad transitiva, se deduce que $\Pi(X;a,b)$ y $\Pi(X;c,d)$ tienen el mismo cardinal, para todos a,b,c,d de X. $\diamondsuit$

Se deduce que podemos restringirnos a las clases de homotopía de caminos cerrados con origen en un punto fijo x_0 cualquiera. El conjunto de estas clases de homotopía se denomina primer grupo de homotopía o grupo fundamental de X y se denota $\Pi_1(X)$ (que es independiente de x_0).

Definición. (Espacio simplemente conexo.) Un espacio conexo es simplemente conexo si todos sus caminos son contráctiles a un punto. En otro caso se dice que es múltiplemente conexo. Se dice que es n-conexo si $\Pi_1(X)$ tiene n elementos.

En un espacio simplemente conexo sólo hay una clase de homotopía de caminos con extremos dados a y b, es decir, esencialmente sólo hay una forma de ir de a a b. En un espacio n-conexo hay n formas esencialmente distintas (es decir, no homotópicamente equivalentes) de ir de un punto a otro.

Ejemplo. $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo. Todos los caminos cerrados son contráctiles a un punto.

Ejemplo. El espacio $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es homeomorfo a la superficie de un cilindro $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^1$. Estos espacios no son simplemente conexos ya que un camino cerrado que rodee el cilindro no es contráctil continuamente a un punto. En general dos caminos cerrados son homotópicos si y sólo si dan el mismo número de vueltas alrededor del cilindro (o de 0 en el plano pinchado). Este número n es entero ya que importa la orientación del camino.

Ejemplo. Las esferas S^n son simplemente conexas si $n \geq 2$. S^1 es un espacio múltiplemente conexo.

Ejemplo. Sea $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2,\ ||x|| \leq 1\}$, es decir un disco cerrado. Consideremos el espacio topológico $X = D_2/\!\sim$ obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos del borde del disco. Este espacio es doblemente conexo, ya que hay dos clases de caminos cerrados: los homotópicos a los caminos nulos y los homotópicos a uno que empiece en un punto del borde y acabe en su punto diametralmente opuesto. Otro ejemplo es el proporcionado por una esfera S^n $(n \geq 2)$ con puntos diametralmente opuestos identificados, que también es un espacio doblemente conexo.

Definición. (Grupo fundamental.) Veamos que $\Pi_1(X)$ forma un grupo. Sin pérdida de generalidad consideremos sólo caminos cerrados con origen en un punto fijo x_0. Sean u_1 y u_2 dos caminos cerrados. El conjunto de clases de homotopía $\Pi_1(X)$ forma un grupo con la ley de multiplicación $[u_1] * [u_2] = [u_1 * u_2]$. Es inmediato que la definición no depende de los representantes, que el neutro es la clase de los caminos contráctiles u homotópicamente triviales y que $[u]^{-1} = [u^{-1}]$. El grupo $\Pi_1(X)$ se denomina primer grupo de homotopía o grupo fundamental de X.

Teorema. Para dos espacios conexos cualesquiera $\Pi_1(X \times Y) = \Pi_1(X) \otimes \Pi_1(Y)$.

Ejemplo. $\Pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$. Ídem, $\Pi_1(\mathrm{S}^n) = \{e\}$ si $n \geq 2$.

Ejemplo. $\Pi_1(\mathrm{S}^1) = \Pi_1(\mathbb{R} \times \mathrm{S}^1) = \mathbb{Z}$. Este $\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo del número de vueltas n.

Ejemplo. El grupo fundamental de $D_2/\sim$ es $\mathbb{Z}_2$. En particular, la composición de dos caminos homotópicamente no triviales es uno trivial.

Definición. (Grupos de homotopía.) El grupo de homotopía de orden n, $\Pi_n(X)$ se define análogamente a $\Pi_1(X)$, a saber, como el conjunto de aplicaciones de S^n en X módulo deformaciones y con una definición natural para la composición de clases.

Definición. (Espacio recubridor universal.) Sea X un espacio conexo y localmente simplemente conexo y sea x_0 un punto fijo (arbitrario) de X. Se define su espacio recubridor universal $\tilde{X}$ como el conjunto de clases de homotopía de caminos con origen en x_0 y extremo cualquier $x \in X$.

Definición. (Proyección canónica.) Hay una proyección natural de $\tilde{X}$ en X, denominada proyección canónica, definida por $\pi(\tilde{x}) = x$, donde x es el extremo de los caminos en la clase $\tilde{x}$. Si X es un espacio N-conexo, cada punto de X tiene N réplicas (preimágenes) en su recubridor, ya que N es número de clases de homotopía de caminos cerrados (o equivalentemente el número de elementos del grupo fundamental). El recubridor recubre al espacio N veces. Es inmediato que si X es simplemente conexo, π es una biyección.

Al espacio recubridor se le puede dotar de una topología inducida por la de X en forma natural, a saber, U es abierto del recubridor si su proyección canónica es un abierto de X. Con esta definición la proyección canónica es una aplicación continua. Además localmente es un homeomorfismo: dado que por hipótesis X es localmente simplemente conexo, π es localmente una biyección y además es localmente bicontinua (ya que π es una aplicación abierta por definición). Todo punto del recubridor tiene un entorno abierto homeomorfo a su proyección canónica. Es inmediato que X es el espacio cociente de $\tilde{X}$ con π.

En el caso particular de que X sea simplemente conexo, cada extremo x define una única clase de homotopía y $\tilde{X}$ es homeomorfo a X. Es decir, en este caso ambos espacios se pueden identificar.

Ejemplo. El espacio recubridor de $\mathbb{R}^2$ es el propio $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo. El espacio recubridor de S^1 es $\mathbb{R}$.

Ejemplo. (Superficie de Riemann.) Consideremos el espacio $X = \mathbb{C} - \{0\}$. Todo punto de X puede expresarse unívocamente en la forma $re^{i\alpha}$ con $r > 0$ y $0 \leq \alpha < 2\pi$, o alternativamente con α definido módulo 2π (es decir, dos fases son equivalentes si y sólo si difieren en un múltiplo entero de 2π). Consideremos un camino u en X con origen 1 y extremo z y elijamos la fase de $u(t)$ por continuidad con $\alpha(0) = 0$. El valor de (r, α) en z coincidirá para dos caminos si y sólo si son homotópicos. En efecto, como el conjunto de posibles valores de α en z es discreto, el valor obtenido por un camino no puede cambiar si este camino se deforma continuamente. Entonces sean u_1 y u_2 dos caminos de 1 a z con fases finales α_1 y α_2. u_2 se puede deformar (sin cambiar la fase en z) a uno que primero rodee n veces (con su signo) la circunferencia de radio 1 y luego vaya a z por u_1. Se tiene que $\alpha_2 = \alpha_1 + 2\pi n$ y el valor de n es 0 si y sólo si u_2 es homotópico a u_1. Por lo tanto los puntos del recubridor de X están caracterizados unívocamente por (r, α),

$0 < r$, $-\infty < \alpha < \infty$ y forman la superficie de Riemann de la función $\log z$. La proyección canónica consiste en $(r, \alpha) \mapsto re^{i\alpha}$ que identifica las fases módulo 2π. Cada hoja de Riemann ($n \leq \alpha < 2\pi + n$, n entero) es una réplica de X. El espacio recubridor de X (o $\mathbb{R} \times \mathrm{S}^1$) es $\mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

Teorema. El espacio recubridor del producto cartesiano de espacios es el producto de recubridores, $\widetilde{X \times Y} = \tilde{X} \times \tilde{Y}$.

Hay una elección natural del punto fijo $\tilde{x}_0$ de $\tilde{X}$, a saber, la clase homotópicamente trivial de caminos cerrados en X con origen x_0, que en particular contiene al camino nulo en x_0 y por tanto $\tilde{x}_0$ es una réplica de x_0.

Teorema. La proyección canónica define una biyección natural entre caminos en $\tilde{X}$ con origen en $\tilde{x}_0$ y caminos en X con origen en x_0

En efecto, sea $\tilde{u}$ un camino en $\tilde{X}$ que une $\tilde{x}_0$ con $\tilde{x}$. Le asociamos su proyección canónica $u = \pi(\tilde{u})$ (es decir, $u(t) = \pi(\tilde{u}(t))$). Veamos que esta aplicación es sobreyectiva: si u es un camino en X (con origen en x_0) podemos asociarle un camino $\tilde{u}$ en $\tilde{X}$ definiendo $\tilde{u}(t)$ como la clase de caminos homotópicos a u_t, el camino u recorrido sólo hasta t, es decir, $\tilde{u}(t) = [u_t]$ con $u_t(s) = u(st)$. Con esta definición $\tilde{u}(0) = \tilde{x}_0$ y $\pi(\tilde{u}) = u$ ya que por construcción $\tilde{u}(t)$ es una réplica de $u(t)$. Veamos que es inyectiva: sean $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ dos caminos en $\tilde{X}$ con origen en $\tilde{x}_0$ y con la misma proyección u, entonces $\tilde{u}_1(t)$ y $\tilde{u}_2(t)$ son réplicas del mismo punto $u(t)$. Los dos caminos coinciden en $t = 0$. Si los dos caminos se separaran a partir de t_1, tendríamos que π no es un homeomorfismo local en $\tilde{a} = \tilde{u}_1(t_1) = \tilde{u}_2(t_1)$ (ya que habría dos réplicas de $\pi(\tilde{a})$ arbitrariamente próximas) y eso está excluido por ser X localmente simplemente conexo. $\diamondsuit$

Teorema. El espacio recubridor (de un espacio conexo y localmente simplemente conexo) es simplemente conexo.

En efecto, es así por construcción: Sean $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ dos caminos en el recubridor con origen en $\tilde{x}_0$ y extremo común $\tilde{a}$. Hay que demostrar que son homotópicos en $\tilde{X}$. Sus proyecciones canónicas u_1 y u_2 tienen origen x_0 y extremo final común $a = \pi(\tilde{a})$. Por el teorema anterior $u_1, u_2 \in \tilde{a}$, luego son homotópicos y se pueden deformar uno en otro. Aplicando la misma deformación mediante π^{-1} a $\tilde{u}_1$ y $\tilde{u}_2$ se deduce que también son homotópicos. (Notar que la deformación de u_2 a u_1 se puede hacer en entornos abiertos de u_2 en los que π es un homeomorfismo y por tanto la deformación inducida en $\tilde{X}$ es continua). $\diamondsuit$

El interés de los espacios simplemente conexos es que no tienen funciones multivaluadas (dentro de una clase restringida de funciones regulares a definir su en caso).

Ejemplo. La función $\log z$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$ pero es multivaluada. Esta multivaluación es no trivial ya que si por ejemplo se elige que el logaritmo es 0 en $z = 1$ y se toma el valor de $\log z$ de forma que la función sea continua a lo largo de un camino que vuelva a $z = 1$ después de n vueltas alrededor de $z = 0$, el valor que hay que asignar al logaritmo en $z = 1$ será $2\pi i n$ obteniéndose una multivaluación. En cambio en la superficie de Riemann (el espacio recubridor de $\mathbb{C} - \{0\}$), no hay multivaluación ya que por definición el camino con origen en 1 no vuelve a 1 después de n vueltas sino a la n-ésima réplica de 1, que es un punto distinto. $\diamondsuit$

Lo mismo ocurre en grupos continuos. Sea G un grupo continuo conexo y $\tilde{G}$ su recubridor universal y tomemos e como origen de los caminos en G.

Definición. (Grupo recubridor universal.) Se denomina grupo recubridor universal de G al espacio $\tilde{G}$ con la ley de multiplicación $[u][v] = [uv]$ (donde $(uv)(t) = u(t)v(t)$).

Es inmediato que la definición es consistente (si se cambia u por u' homotópico a u el camino $u'v$ es homotópico a uv y el resultado no depende de los representantes elegidos). El neutro $\tilde{e}$ es la clase de los caminos cerrados triviales (en particular el camino nulo en e), y $[u]^{-1} = [u^{-1}]$ donde $(u^{-1})(t) = u(t)^{-1}$ (no coincide con el camino inverso).

Por construcción la proyección canónica de $\tilde{G}$ en G es un homomorfismo abierto de grupos continuos:

$$\pi([u][v]) = \pi([uv]) = (uv)(1) = u(1)v(1) = \pi([u])\pi([v])\,. \tag{5.1}$$

El núcleo de π es el conjunto de clases de homotopía de caminos cerrados y por tanto coincide con el grupo fundamental de G, $\Pi_1(G)$. (Además la multiplicación de $\Pi_1(G)$ como grupo coincide con la multiplicación como subgrupo de $\tilde{G}$ ya que dadas dos clases de caminos cerrados $[u_1]$ y $[u_2]$, se puede elegir u_1 tal que $u_1 = e$ si $t \geq \frac{1}{2}$ y $u_2 = e$ si $t \leq \frac{1}{2}$, con lo que u_1u_2 recorre primero u_1 y luego u_2 que es la ley de multiplicación del grupo fundamental).

Teorema. Sea G un grupo continuo conexo y localmente simplemente conexo, entonces $\tilde{G}/\Pi_1(G) \simeq G$. Además, $\tilde{G}$ y G son localmente isomorfos.

En efecto, ya que $\pi : \tilde{G} \to G$ es un homomorfismo de grupos continuos con núcleo $\Pi_1(G)$ e imagen G que localmente es un homeomorfismo. El grupo fundamental es un subgrupo invariante discreto (dado que G es localmente simplemente conexo) del grupo recubridor universal. $\diamondsuit$

Teorema. El grupo fundamental de un grupo continuo es abeliano.

En efecto ya que $\Pi_1(G)$ es un subgrupo central del recubridor (por ser subgrupo invariante discreto). $\diamondsuit$

Notar que toda representación de G es también una representación de su grupo recubridor (ya que G es una imagen homomorfa de $\tilde{G}$).

Ejemplo. El espacio recubridor de S^1 es $\mathbb{R}$. El grupo recubridor de $\mathrm{U}(1)$ es $(\mathbb{R},+)$, y $(\mathbb{Z},+)$ es el grupo fundamental de $\mathrm{U}(1)$, de modo que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathrm{U}(1)$. La proyección canónica es $\pi : \phi \in \mathbb{R} \mapsto \exp(i\phi) \in \mathrm{U}(1)$. $\diamondsuit$

Teorema. Sea G un grupo continuo conexo y simplemente conexo y sea f un homomorfismo local de G en un grupo continuo H:

(1) f puede extenderse en forma única a un homomorfismo global.

(2) Si f es localmente sobreyectivo su extensión es un homomorfismo sobreyectivo (globalmente).

(3) Si H es simplemente conexo y f es un isomorfismo local su extensión es un isomorfismo (globalmente).

En efecto, sea U el entorno de la identidad en el que f es un homomorfismo local.

(1) Un elemento g cualquiera de G puede escribirse como $g_1 g_2 \cdots g_n$ con g_i en U. Si f se puede extender a un homomorfismo global, debe cumplirse $f(g) = f(g_1)f(g_2)\cdots f(g_n)$. El punto delicado es comprobar que esta definición es unívoca, ya que podría ocurrir que otra construcción $g = g'_1 g'_2 \cdots g'_{n'}$ llevara a un valor distinto para $f(g)$. En primer lugar notemos que los g_i se pueden tomar arbitrariamente próximos a la identidad con lo que el producto de elementos tiende a un camino (continuo) que une e con g. Se trata de ver que todos los caminos son equivalentes. Sea $\{g_i,\ i = 1,\dots,n\}$ el camino que utilizo para definir $f(g)$ y sea $\{g'_i,\ i = 1,\dots,n\}$ una deformación de éste, es decir:

1) $g'_i = g_i$ para $i < k$ o $i > m$ con $k \le m$,

2) $g'_k \cdots g'_m = g_k \cdots g_m$,

3) Los productos $g_k \cdots g_\ell$ y $g'_k \cdots g'_\ell$ están en U para $k \le \ell \le m$.

Entonces se cumple

$$
\begin{aligned}
f(g_1)\cdots f(g_n) &= f(g'_1)\cdots f(g'_{k-1})f(g_k\cdots g_m)f(g'_{m+1})\cdots f(g'_n) \\
&= f(g'_1)\cdots f(g'_{k-1})f(g'_k\cdots g'_m)f(g'_{m+1})\cdots f(g'_n) \\
&= f(g'_1)\cdots f(g'_n)\,,
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

y los dos caminos asignan el mismo valor a $f(g)$. Como G es simplemente conexo por hipótesis, todos los caminos con extremo en g son homotópicos y se pueden obtener por deformación de uno dado. Es inmediato que f es un homomorfismo: si a,b son dos elementos cualesquiera de G, $a = a_1\cdots a_n$, $b = b_1\cdots b_m$, $ab = a_1\cdots a_n b_1\cdots b_m$ con a_i, b_j de U, entonces $f(ab) = f(a_1)\cdots f(a_n)f(b_1)\cdots f(b_m) = f(a)f(b)$.

(2) Por hipótesis $f(U)$ es un entorno de la identidad de H. (Notar que siempre $e \in f(U) \subseteq H$, pero $f(U)$ es un entorno de la identidad sólo si f es localmente sobreyectiva.) $f(U)$ genera todo H, todo $h \in H$ puede escribirse como $h = h_1 h_2 \cdots h_n$ (con n dependiente de h) y $h_i = f(g_i)$, de donde $h = f(g_1 g_2 \cdots g_n)$ y $H = f(G)$.

(3) Si H es simplemente conexo y f es un isomorfismo local, f^{-1} también y se puede extender a un homomorfismo que es el inverso de f, por tanto f es un isomorfismo. $\diamondsuit$

Se deduce que si G es simplemente conexo (y en particular el grupo recubridor universal de un grupo continuo) sus representaciones son univaluadas (es decir, si son univaluadas en un entorno de la identidad, lo son globalmente).

Si G no es simplemente conexo puede tener representaciones multivaluadas ya que al extender una representación localmente univaluada por caminos distintos no homotópicos se puede llegar a dos operadores distintos para el mismo elemento de G. Desde el punto de vista del grupo recubridor se ha llegado a distintos elementos y la representación construida por extensión es univaluada. Por tanto el grupo recubridor contiene sólo representaciones univaluadas que pueden ser multivaluadas si se toman como representaciones de G. Es decir, si $\tilde{T}$ es una representación de $\tilde{G}$, $T = \tilde{T}\circ\pi^{-1}$ es una representación (multivaluada) de G.

Teorema. Si G es un grupo continuo conexo N-conexo, sus representaciones son a lo sumo N-valuadas.

En efecto, ya que $T = \tilde{T} \circ \pi^{-1}$ con $\tilde{T}$ univaluada y π^{-1} N-valuada. $\diamondsuit$

Ejemplo. La representación $x \mapsto \exp(izx)$, con z complejo, es univaluada para $\mathbb{R}$. Por otro lado si x es cualquiera de los ángulos asociados a un elemento de $\mathrm{U}(1)$, $\omega = \exp(ix)$, la representación $\omega \mapsto \omega^z = \exp(izx)$ es multivaluada (a menos que z sea entero), ya que a $\omega = 1$ le corresponden todos los valores $\exp(2\pi inz)$, con n entero.

Teorema. Sea Γ una de las clases de equivalencia formada por todos los grupos continuos conexos y localmente simplemente conexos relacionados por ser localmente isomorfos entre sí:

1) Todos los grupos simplemente conexos en Γ son isomorfos (globalmente) entre sí. Por tanto el grupo recubridor universal $\tilde{G}$ es común a toda la familia (módulo isomorfismos globales).

2) Todo miembro G de la clase Γ es de la forma $\tilde{G}/N \simeq G$, donde N es un subgrupo invariante discreto de $\tilde{G}$

3) N es el grupo fundamental de G.

Respecto del punto 1), si dos grupos G_1 y G_2 en Γ son simplemente conexos, el isomorfismo local f se puede extender a uno global. Nótese que los caminos en $\tilde{G}$ que unen el neutro con otro elemento de N corresponden a caminos cerrados en G que no son homotópicamente triviales (ya que no es posible contraerlos a un punto de $\tilde{G}$ uniendo todo el tiempo dos réplicas del neutro de G).

Ejemplo. El grupo $\mathrm{SU}(2)$ es localmente isomorfo a $\mathrm{SO}(3)$ y es simplemente conexo luego es el recubridor de la familia, además $\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathrm{SO}(3)$, de donde $\mathbb{Z}_2$ es el grupo fundamental de $\mathrm{SO}(3)$ que es doblemente conexo. Dado que $\pi(\pm g) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{SU}(2)$ tiene la topología de S^3, $\mathrm{SO}(3)$ tiene la topología de una esfera tridimensional con puntos diametralmente opuestos identificados. Para estudiar las representaciones de $\mathrm{SU}(2)$ podemos considerar su representación regular; dado que $\mathrm{SU}(2)$ es compacto la representación regular contiene todas las representaciones irreducibles de dimensión finita y son todas unitarias.

$$V = \{f : \mathrm{SU}(2) \to \mathbb{C}\} = V_+ \oplus V_-\,, \quad f_\pm \in V_\pm \text{ si } \ f_\pm(-g) = \pm f_\pm(g)\,, \tag{5.3}$$

$$(T^L_g f)(g') = f(g^{-1}g')\,. \tag{5.4}$$

Los espacios de funciones pares e impares son invariantes bajo la representación regular:

$$(T^L_g f_\pm)(-g') = f_\pm(-g^{-1}g') = \pm f_\pm(g^{-1}g') = \pm(T^L_g f_\pm)(g') \ \ \Rightarrow T^L_g f_\pm \in V_\pm\,. \tag{5.5}$$

Consecuentemente las representaciones irreducibles se clasifican en pares o enteras e impares o semienteras. Las representaciones enteras son representaciones de $\mathrm{SO}(3)$, en cambio las semienteras son representaciones bivaluadas de $\mathrm{SO}(3)$ ya que $\mathbb{R} \mapsto \pm g \mapsto \pm D(g)$ si D es impar.

Ejemplos de representaciones enteras de $\mathrm{SU}(2)$ son la trivial ($j = 0$), y la representación fundamental de $\mathrm{SO}(3)$ ($j = 1$). La representación fundamental de $\mathrm{SU}(2)$ es una representación semientera y por tanto una representación bivaluada de $\mathrm{SO}(3)$ ($j = \frac{1}{2}$). Una representación irreducible correspondiente a momento angular j es entera o semientera según lo sea j (es decir, $2j$ par o impar).

Como se ve fácilmente usando la parametrización eje-ángulo, una vuelta de ángulo 2π sobre un eje fijo define un camino cerrado en $\mathrm{SO}(3)$ que no es homotópicamente trivial ya que en $\mathrm{SU}(2)$ pasa de E a $-E$ (tomando $E \in \mathrm{SU}(2)$ como origen).

$$\exp(-i2\pi J_z)|jj\rangle = \exp(-i2\pi j)|jj\rangle = (-1)^{2j}|jj\rangle \,. \tag{5.6}$$

En cambio una vuelta de 4π es homotópicamente trivial (ya que el grupo de homotopía es $\mathbb{Z}_2$). $\diamondsuit$

6 Grupos de Lie lineales

Definición. (Grupos de Lie lineales.) Se denominan grupos de Lie lineales o clásicos a los grupos de Lie de matrices. Es decir, los subgrupos de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Definición. (Grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.) El grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es el formado por las matrices $n\times n$ complejas no singulares, es decir, con determinante distinto de cero. Es el grupo de cambios de base en $\mathbb{C}^n$.

La dimensión de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es $2n^2$ ya que una matriz compleja A $n\times n$ tiene n^2 elementos de matriz, y por tanto hay $2n^2$ parámetros reales. La condición $\det(A) \neq 0$ no pone ninguna condición en un entorno de la identidad y por tanto no elimina ningún parámetro.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ es conexo. Sin embargo no es simplemente conexo. En efecto, $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$ que no es simplemente conexo. Por otro lado la aplicación $A \mapsto \det(A)$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ en $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, define un homomorfismo de grupos continuos, debido a la identidad $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, para dos matrices $n\times n$ cualesquiera. Si un camino cerrado en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tiene una imagen no homotópicamente trivial en $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$, no puede ser él mismo homotópicamente trivial (ya que la contracción a un punto en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ definiría una contracción a un punto en su imagen). El camino $u(t) = \mathrm{diag}(\exp(2\pi i t), 1, 1, \dots, 1)$ es no trivial. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ no es compacto ya que define un subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^{2n^2}$. $\diamondsuit$

Definición. (Grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.) El grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ es el subgrupo de matrices reales de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Corresponde a los posibles cambios de base en $\mathbb{R}^n$.

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tiene dimensión n^2, no es compacto y tampoco es conexo. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ está formado por dos componentes conexas, a saber $\mathrm{GL}^{\pm}(n,\mathbb{R})$, caracterizadas por tener determinante positivo o negativo. $\diamondsuit$

Una forma práctica de definir subgrupos de un grupo es fijando que dejen invariantes un conjunto de propiedades. Más concretamente:

Teorema. Sea G un grupo de transformaciones (permutaciones) sobre un conjunto X y sea $\Sigma = \{X_i, i \in I\}$ una colección cualquiera de subconjuntos de X. El conjunto G_Σ de transformaciones g de G tales que $gX_i = X_i$ $\forall X_i \in \Sigma$ forma un subgrupo de G, denominado grupo de simetría de Σ. Equivalentemente, si π es una partición de X, el grupo de simetría es el conjunto de transformaciones que deja invariante la partición ($gX_i \subseteq X_i$, $\forall X_i \in \pi$).

En efecto, si $g_{1,2}X_i = X_i$, $(g_1 g_2)X_i = g_1(g_2 X_i) = g_1 X_i = X_i$, luego es algebraicamente cerrado. Obviamente $eX_i = X_i$ (la transformación identidad). Finalmente, si g es una biyección en X tal que $gX_i = X_i$, entonces g es una biyección en X_i y también en su complementario y lo mismo g^{-1}, es decir, $g^{-1}X_i = X_i$. $\diamondsuit$

Nótese que no basta que $gX_i \subseteq X_i$ para todo X_i de la colección. Por ejemplo $X = \mathbb{R}$ y $g(x) = 2x$ deja invariante $\mathbb{Z}$ (es decir, $g\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$) pero g^{-1} no.

Así el grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ deja invariante $\mathbb{R}^n$. El grupo $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ deja invariante la orientación de la base.

Definición. (Grupos lineales unimodulares.) El grupo unimodular (también denominado especial) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ es el subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ formado por las matrices con determinante 1. Es inmediato que dicho conjunto forma un grupo.

La condición $\det(A) = 1$ elimina un elemento de matriz complejo, es decir dos parámetros reales, luego $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ tiene dimensión $2(n^2-1)$. Este grupo es conexo y simplemente conexo.

Análogamente se define $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ como el subgrupo de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ formado por matrices reales. Su dimensión es n^2-1 y es conexo.

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ (Ídem $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$) es el grupo de transformaciones lineales complejas (ídem reales) que conservan el tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, es decir,

$$A^{i_1}{}_{j_1} \cdots A^{i_n}{}_{j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} . \tag{6.1}$$

En efecto, ya que para toda matriz $n \times n$ A se cumple

$$A^{i_1}{}_{j_1} \cdots A^{i_n}{}_{j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = \det(A) \varepsilon^{i_1 \dots i_n} . \tag{6.2}$$

Estos grupos son no compactos. Por ejemplo el conjunto de matrices de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ definido por $A = \mathrm{diag}(e^z, e^{-z}, 1, \dots, 1)$ tienen elementos de matriz no acotados. $\diamondsuit$

Definición. (Grupos unitarios.) El grupo $\mathrm{U}(n)$ es el subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ formado por las matrices unitarias, $A^\dagger A = E$ (donde $A^\dagger = A^{*T}$ o $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$). La propiedad $\det(A^\dagger) = \det(A)^*$ garantiza que A es invertible.

La dimensión de $\mathrm{U}(n)$ es n^2. En efecto, A de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tiene $2n^2$ parámetros reales. La condición $A^\dagger A = E$ equivale a n^2 ecuaciones complejas o $2n^2$ ecuaciones reales, sin embargo $A^\dagger A$ es siempre hermítica luego sólo la mitad son independientes y eliminan n^2 parámetros.

Este grupo es compacto, ya que la condición de unitaridad, $A_{ik}A^*_{jk} = \delta_{ij}$ implica $\sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 = 1$ y las componentes están acotadas. Además las condición es algebraica y el conjunto es cerrado. Es conexo pero no simplemente conexo, por el mismo argumento usado para $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

El grupo $\mathrm{U}(n)$ también se puede definir como el conjunto de matrices que dejan invariante la forma cuadrática $(z_1, z_2) = z_1^\dagger z_2 = \sum_i (z_1)_i^* (z_2)_i$ definida en $\mathbb{C}^n$. Es decir, A es de $\mathrm{U}(n)$ si y sólo si $(Az_1, Az_2) = (z_1, z_2)$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$.

Análogamente se define el grupo pseudo unitario $\mathrm{U}(p,q)$ como el formado por las matrices $n \times n$ complejas (con $n = p+q$) que dejan invariante la forma cuadrática $z^\dagger \eta_{pq} z$ donde la métrica es $\eta_{pq} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ con p unos y q menos unos. Es decir, matrices A tales que $A^\dagger \eta_{pq} A = \eta_{pq}$ ($\det(\eta_{pq}) \neq 0$ garantiza que A es no singular). Sin pérdida de generalidad se puede tomar $p \geq q > 0$.

Nótese que si en lugar η_{pq} se utiliza otra métrica hermítica no singular η, el grupo asociado es isomorfo a uno de los $\mathrm{U}(p,q)$. En efecto, por ser η hermítica puede diagonalizarse mediante una matriz unitaria S, es decir, $\eta = S^{-1} D S$ donde $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y λ_i son los autovalores, que son reales. Además puede elegirse S de modo que los p valores propios positivos correspondan a λ_i para $1 \leq i \leq p$ y los negativos a $p < i \leq n$. Sea $\chi = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^{\frac{1}{2}}, \dots, |\lambda_n|^{\frac{1}{2}})$, entonces χ es una matriz hermítica tal que $D = \chi \eta_{pq} \chi$. La condición de dejar invariante la forma cuadrática $z^\dagger \eta z$, es decir, $A^\dagger \eta A = \eta$ equivale a $U^\dagger \eta_{pq} U = \eta_{pq}$ definiendo $U = \chi S A S^{-1} \chi^{-1}$. $\diamondsuit$

Definición. (Grupos unitarios unimodulares.) El grupo unitario unimodular $\mathrm{SU}(n)$ se define como $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(n)$.

Es de dimensión $n^2 - 1$ ya que el determinante de una matriz unitaria es un número complejo de módulo 1 y fijarlo a 1 sólo elimina un parámetro real. Es compacto, conexo y simplemente conexo.

Análogamente $\mathrm{SU}(p,q) = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(p,q)$ con $n = p+q \geq 2$ y $p \geq q > 0$. Es conexo.

El grupo $\mathrm{SU}^*(2n)$ está formado por las matrices A de $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{C})$ tales que $AJ = JA^*$ donde J es la matriz simpléctica de dimensión $2n$, $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ (siendo E_n la matriz identidad $n \times n$). La matriz J cumple $J^2 = -E_{2n}$, $J = J^* = -J^T = -J^\dagger$, $\det(J) = +1$. (La condición $AJ = JA^*$ equivale a decir que A conmuta con la aplicación $\varphi : z \mapsto Jz^*$ de $\mathbb{C}^{2n}$ en $\mathbb{C}^{2n}$, es decir, que deja φ invariante y esto ya implica que forman subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{C})$). Una comprobación de que forman grupo es

$$A, B \in \mathrm{SU}^*(2n), \quad ABJ = AJB^* = JA^*B^* = J(AB)^*, \tag{6.3}$$

$$A^{-1}J = (J^{-1}A)^{-1} = (A^*J^{-1})^{-1} = J(A^{-1})^*. \tag{6.4}$$

Usando la condición $AJ = JA^*$ es inmediato que las matrices de $\mathrm{SU}^*(2n)$ son del tipo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ donde a y b son matrices complejas $n \times n$ y que $\det(A)$ es real. Por tanto la condición $\det(A) = 1$ elimina sólo un parámetro y la dimensión del grupo es $4n^2 - 1$. Este grupo es conexo y es no compacto si $n \geq 2$ (el grupo $\mathrm{SU}^*(2)$ coincide con $\mathrm{SU}(2)$). $\diamondsuit$

Definición. (Grupos ortogonales.) El grupo $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ es el formado por las matrices $n \times n$ complejas ortogonales, $A^T A = E$. Equivalentemente, las matrices que dejan invariante la forma cuadrática $z_1^T z_2$ en $\mathbb{C}^n$.

Dado que $A^T A$ es una matriz simétrica, la condición de ortogonalidad sólo impone $n(n+1)/2$ ecuaciones complejas por tanto $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ es de dimensión $n(n-1)$. Por otro lado, usando $\det(A^T) = \det(A)$, se deduce que $\det(A) = \pm 1$ y $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})$ tiene dos componentes conexas. La componente conexa con la identidad es el grupo $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{O}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Estos grupos son no compactos.

El grupo de matrices ortogonales reales $\mathrm{O}(n)$ (también denominado $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$) se define como $\mathrm{O}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ o equivalentemente como $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. La componente conexa con la identidad es el grupo de matrices unimodulares ortogonales reales, $\mathrm{SO}(n)$, y tiene dimensión $n(n-1)/2$. Este grupo es compacto.

El grupo de $\mathrm{SO}(p,q)$, con $p \geq q > 0$ y $n = p+q \geq 2$ se define como $\mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Es decir, $A^T \eta_{pq} A = \eta_{pq}$, $A^* = A$ y $\det(A) = 1$. El grupo de matrices pseudo ortogonales $\mathrm{SO}(p,q)$ es no compacto y tiene dos componentes conexas. Nótese que $\mathrm{O}(3,1)$ es el grupo de Lorentz, con cuatro componentes conexas. Todo grupo η-ortogonal real (asociado a una métrica η real, simétrica y no singular) es isomorfo uno de los grupos reales anteriores por una construcción análoga a la del caso unitario.

Nótese que no se definen los grupos pseudo ortogonales complejos asociados a η_{pq} ya que bajo cambios de base complejos toda métrica simétrica no singular se puede llevar al caso ortogonal.

El grupo $\mathrm{SO}^*(2n)$ es el formado por matrices de $\mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ que conservan la forma cuadrática $z_1^\dagger J z_2$, es decir, tales que $A^\dagger J A = J$. De hecho, $\mathrm{SO}^*(2n) = \mathrm{SU}^*(2n) \cap \mathrm{SO}(2n,\mathbb{C})$ ya que si A es ortogonal, $(A^\dagger)^{-1} = A^*$ y la condición $A^\dagger J A = J$ equivale a $JA = A^* J$. Su dimensión es $n(2n-1)$. $\diamondsuit$

Definición. (Grupos simplécticos.) El grupo simpléctico complejo $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ se define como el conjunto de matrices de $\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$ que dejan invariante la forma cuadrática $z_1^T J z_2$, es decir, tales que $A^T J A = J$. Nótese que $\det(A) = \pm 1$. Tiene dimensión $2n(2n+1)$.

El grupo simpléctico real $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ es el subgrupo de matrices reales de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$. Tiene dimensión $n(2n+1)$.

El grupo unitario simpléctico (o simplemente grupo simpléctico) $\mathrm{Sp}(2n)$ se define como $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n)$. Tiene dimensión $n(2n+1)$.

Finalmente el grupo simpléctico pseudo unitario $\mathrm{Sp}(2p,2q)$ con $p \geq q > 0$ y $p+q = n$ se define como $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2p,2q)$.

7 Álgebras de Lie

Definición. (Producto de Lie.) Sea L un espacio vectorial. Un producto (o paréntesis) de Lie es una operación interna en L, que denotamos por (x,y), $x,y \in L$, tal que

(1) (x,y) es lineal en x e y.

(2) $\forall x_1,x_2 \in L$, $(x_1,x_2) = -(x_2,x_1)$. (Antisimétrico.)

(3) $\forall x_1,x_2,x_3 \in L$, $((x_1,x_2),x_3) + ((x_2,x_3),x_1) + ((x_3,x_1),x_2) = 0$. (Identidad de Jacobi o asociatividad de Jacobi.)

Ejemplo. El producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ es un producto de Lie. En efecto, si $a,b\in\mathbb{R}^3$, $(a\times b)^i=\varepsilon_{ijk}a^jb^k$ es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi por $a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$. Esta igualdad se deriva usando la identidad

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\,. \tag{7.1}$$

Ejemplo. Si L es un álgebra asociativa (por ejemplo formada por operadores lineales o matrices) el producto

$$x,y\in L \qquad (x,y)=[x,y]:=xy-yx \tag{7.2}$$

es un producto de Lie. El elemento $[x,y]$ se denomina el conmutador de x con y. Es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi como se ve desarrollando a partir de $[[x_1,x_2],x_3]=x_1x_2x_3-x_3x_1x_2-x_2x_1x_3+x_3x_2x_1$ y notando que una ordenación y otra permutada cíclicamente aparecen con signos opuestos.

Ejemplo. Sea L es el espacio de funciones reales suficientemente diferenciables de $2n$ variables reales $q_i,\ p_i,\ i=1,\dots,n$ (espacio de las fases de mecánica clásica), el paréntesis de Poisson define un producto de Lie.

$$F,G\in L,\quad \{F,G\}:=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right). \tag{7.3}$$

En particular, $\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0$ and $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$ Denotando las variables $(q_1,\dots,q_n,\ p_1,\dots,p_n)$ por $\xi^1,\dots,\xi^{2n}$ y $\eta^{\alpha\beta}$ la métrica simpléctica J (es decir, 1 si $1\le\alpha\le n$ y $\beta=\alpha+n$, -1 si $n+1\le\alpha\le 2n$ y $\beta=\alpha-n$, y 0 en otro caso) el paréntesis de Lie se puede reescribir como

$$\{F,G\}:=\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha F\partial_\beta G \tag{7.4}$$

donde ∂_α es la derivada parcial respecto ξ_α. Con esta notación $\{\xi^\alpha,\xi^\beta\}=\eta^{\alpha\beta}$. La identidad de Jacobi se comprueba inmediatamente usando que $\eta^{\alpha\beta}$ es antisimétrica y constante:

$$\begin{aligned}\{\{f_1,f_2\},f_3\}&=\eta^{ab}\partial_a(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha f_1\partial_\beta f_2)\partial_b f_3\\&=\eta^{\alpha\beta}\eta^{ab}\partial_a\partial_\alpha f_1\partial_\beta f_2\partial_b f_3+\eta^{\alpha\beta}\eta^{ab}\partial_\alpha f_1\partial_a\partial_\beta f_2\partial_b f_3\,.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Los dos términos se cancelan aplicando las substituciones $1\to 2,\ 2\to 3,\ 3\to 1,\ \alpha\to a,\ \beta\to b,\ a\to\beta$ y $b\to\alpha$ al primero de ellos. $\diamondsuit$

Definición. (Álgebra de Lie.) Un álgebra de Lie es un espacio vectorial L de dimensión finita dotado con una operación interna que sea producto de Lie. El álgebra de Lie es real o compleja según lo sea el espacio vectorial. La dimensión del álgebra es la del espacio vectorial. El álgebra es abeliana si el producto de Lie es 0 para cualesquiera dos elementos.

Las álgebras de Lie complejas se pueden ver como álgebras reales de dimensión doble.

Si x es un elemento de un álgebra de Lie L y M, N son subconjuntos de L, denotamos el conjunto $\{(x,y),y\in M\}$ por (x,M) y denotamos $\{(y,z),y\in M,z\in N\}$ por (M,N).

Definición. (Subálgebra de Lie.) Un subespacio vectorial N de un álgebra de Lie L es una subálgebra de Lie si es cerrado bajo el producto de Lie de L, es decir, $(N,N) \subseteq N$. La subálgebra es abeliana si $(N,N) = 0$.

Definición. (Subálgebra ideal de Lie.) Un subespacio vectorial N de un álgebra de Lie L es un ideal si $(N,L) \subseteq N$. Un ideal es automáticamente una subálgebra. Nótese que en álgebras de Lie no hay que distinguir entre ideal por la derecha y por la izquierda. El ideal es central si $(N,L) = 0$.

Definición. (Homomorfismo de álgebras de Lie.) Sean L y M dos álgebras de Lie. Una aplicación lineal f de L en M es un homomorfismo de álgebras de Lie si $\forall A,B \in L$, $f((A,B)) = (f(A), f(B))$. El conjunto $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0)$ se denomina núcleo de f. El conjunto $f(L)$ se denomina imagen de f. El homomorfismo el fiel si f es inyectiva. Si $f(L) = M$ se dice que M es homomorfo a L.

Definición. (Isomorfismo de álgebras de Lie.) Sean L y M dos álgebras de Lie. Una aplicación lineal f de L en M es un isomorfismo de álgebras de Lie si es un homomorfismo y es biyectivo. Las álgebras de Lie son entonces isomorfas.

Definición. (Álgebra cociente.) Sea L un álgebra de Lie y N un ideal de L. El álgebra de Lie cociente L/N es el espacio vectorial cociente, $\{[A] = A+N, A \in L\}$, tomando como producto de Lie $([A],[B]) = [(A,B)]$.

Es inmediato que la definición es correcta ya que si $n_1, n_2 \in N$

$$(A+n_1, B+n_2) = (A,B) + (n_1,B) + (A,n_2) + (n_1,n_2) = (A,B) + n_3\,, \quad n_3 \in N\,, \tag{7.6}$$

usando que N es un ideal. Por construcción la proyección canónica $\pi : L \to L/N$ es un homomorfismo sobreyectivo.

Teorema. Sea $f : L \to M$ un homomorfismo de álgebras de Lie y N su núcleo. Entonces:

(1) N es un ideal de L.

(2) La imagen de f es una subálgebra de M.

(3) $L/N \simeq f(L)$.

En efecto,

(1) $f((N,L)) = (f(N), f(L)) = (0, f(L)) = 0$, luego $(N,L) \subseteq N$ y N es un ideal.

(2) $(f(L), f(L)) = f((L,L)) \subseteq f(L)$.

(3) El isomorfismo es el natural: $f^*([A]) := f(A)$. La definición es correcta: si $n \in N$, $f(A+n) = f(A) + f(n) = f(A)$. Es homomorfismo: $f^*(([A],[B])) = f^*([(A,B)]) = f((A,B)) = (f(A), f(B)) = (f^*([A]), f^*([B]))$. Es inyectivo: si $[A]$ y $[B]$ son clases distintas, $A - B \notin N$, $f^*([A]) - f^*([B]) = f^*([A]-[B]) = f(A-B) \neq 0$. Es sobreyectivo por construcción. $\diamondsuit$

Definición. (Constantes de estructura.) Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una base de un álgebra de Lie L de dimensión n. Por tanto

$$(A_i, A_j) = c_{ij}{}^k A_k\,, \quad i,j,k = 1,\ldots,n\,, \tag{7.7}$$

donde los números $c_{ij}{}^k$ se denominan constantes de estructura de L. Obviamente dependen de la base elegida y bajo un cambio de base $A'_{i'} = S^i{}_{i'} A_i$ se transforman como un tensor covariante en los dos primeros índices y contravariante en el último:

$$c'_{i'j'}{}^{k'} = S^i{}_{i'} S^j{}_{j'} (S^{-1})^{k'}{}_k c_{ij}{}^k \tag{7.8}$$

Las constantes de estructura caracterizan el álgebra ya que permiten calcular el producto de Lie de dos elementos cualesquiera:

$$X = x^i A_i,\ Y = y^i A_i,\ (X,Y) = x^i y^j c_{ij}{}^k A_k\,. \tag{7.9}$$

Teorema. Si f es un homomorfismo de álgebras de Lie de L en M y $c_{ij}{}^k$ son las constantes de estructura en la base $\{A_i\}_{i=1}^n$ de L entonces

$$(f(A_i), f(B_j)) = c_{ij}{}^k f(A_k)\,. \tag{7.10}$$

Teorema. Dos álgebras de Lie (sobre el mismo cuerpo) son isomorfas si y sólo si admiten sendas bases con las mismas constantes de estructura asociadas.

En efecto, si f es un isomorfismo de L en M y $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una base de L, entonces $f(A_i)$ es una base de M con las mismas constantes de estructura. Si las constantes de estructura coinciden en sendas bases A_i y B_i, f definido por $f(A_i) = B_i$ es un isomorfismo de álgebras de Lie:

$$\begin{aligned} f((X,Y)) &= f((x^i A_i, y^j A_j)) = x^i y^j c_{ij}{}^k f(A_k) = x^i y^j c_{ij}{}^k B_k \\ &= (x^i B_i, y^j B_j) = (f(X), f(Y)). \end{aligned} \tag{7.11}$$

$\diamondsuit$

De las propiedades del producto de Lie se sigue que las constantes de estructura de un álgebra de Lie satisfacen:

(1) $c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k$. (Antisimetría.)

(2) $c_{ij}{}^\ell c_{\ell k}{}^m + c_{jk}{}^\ell c_{\ell i}{}^m + c_{ki}{}^\ell c_{\ell j}{}^m = 0$. (Identidad de Jacobi.)

Y viceversa, si estas dos condiciones se cumplen y $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una base de un espacio vectorial L, $(A_i, A_j) = c_{ij}{}^k A_k$ define un producto de Lie en L.

Ejemplo. Sea L un espacio de dimensión 3 y $\{X_1, X_2, X_3\}$ una base. Las fórmulas

$$(X_1, X_2) = X_1\,, \quad (X_3, X_1) = 0\,, \quad (X_2, X_3) = X_2 + X_3\,, \tag{7.12}$$

no definen un álgebra de Lie sobre L. En efecto, ya que $((X_1,X_2),X_3) = (X_1,X_3) = 0$ y $((X_3,X_1),X_2) = 0$ pero $((X_2,X_3),X_1) = (X_2+X_3,X_1) = -X_1$ y no se cumple la identidad de Jacobi a menos que $X_1 = 0$ en contra de ser $\{X_1,X_2,X_3\}$ linealmente independientes.

Definición. (Álgebra de Lie lineal.) Un álgebra de Lie es un álgebra de Lie lineal sobre un espacio vectorial V cuando el espacio vectorial L está formado por operadores lineales en V y el producto de Lie es el conmutador. En particular, el álgebra es matricial si el espacio V es de dimensión finita. En general se exige que V sea un espacio de Hilbert.

Nota. No debe confundirse la dimensión del álgebra lineal L con la dimensión de los operadores que la forman (a saber, la dimensión de V).

Ejemplo. El conjunto de matrices $n\times n$ complejas, forma un álgebra de Lie matricial denominada $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. (No debe confundirse el conjunto $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ con $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ que sólo tiene matrices no singulares.) El álgebra $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ tiene dimensión n^2 como álgebra compleja y $2n^2$ como álgebra real. Obviamente todas las álgebras de Lie de matrices $n\times n$ son subálgebras de esta.

Ejemplo. (Constantes de estructura de $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$.) Una base de $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ está formada por las matrices ${X_a}^b$, $a,b = 1,\dots,n$, con elementos de matriz $({X_a}^b)^i{}_j = \delta^i_a\delta^b_j$, es decir, 1 en el elemento de matriz $(ij) = (ab)$ y 0 en el resto. Toda matriz A con elementos de matriz $a^i{}_j$ puede escribirse como $A = a^i{}_j {X_i}^j$. Para obtener las constantes de estructura, evaluamos el conmutador de dos elementos de la base:

$$\begin{aligned}([{X_a}^b,{X_c}^d])^i{}_j &= ({X_a}^b)^i{}_k({X_c}^d)^k{}_j - ({X_c}^d)^i{}_k({X_a}^b)^k{}_j \\ &= \delta^i_a\delta^b_k\delta^k_c\delta^d_j - \delta^i_c\delta^d_k\delta^k_a\delta^b_j = \delta^b_c\delta^i_a\delta^d_j - \delta^d_a\delta^i_c\delta^b_j = \delta^b_c({X_a}^d)^i{}_j - \delta^d_a({X_c}^b)^i{}_j.\end{aligned} \tag{7.13}$$

De donde,

$$[{X_a}^b,{X_c}^d] = \delta^b_c {X_a}^d - \delta^d_a {X_c}^b = c_a{}^b{}_c{}^{de}{}_f {X_e}^f \tag{7.14}$$

y las constantes de estructura son

$$c_a{}^b{}_c{}^{de}{}_f = \delta^b_c\delta^e_a\delta^d_f - \delta^d_a\delta^e_c\delta^b_f. \qquad \diamondsuit \tag{7.15}$$

Ejemplo. El álgebra matricial $\mathrm{su}(2)$ es el conjunto de matrices complejas 2×2 antihermíticas y de traza 0 considerado como espacio vectorial real. En efecto, ya que si a, b son dos matrices $n\times n$ cualesquiera, $[a,b]^\dagger = -[a^\dagger,b^\dagger]$ y $\mathrm{tr}([a,b]) = 0$. Una base es la formada por $-i\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ ya que cualquier elemento de $\mathrm{su}(2)$ se puede escribir en forma única como $x = -i\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{x}$, con $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$. Por tanto la dimensión de $\mathrm{su}(2)$ es 3. Nótese que $\mathrm{su}(2)$ es un álgebra real aunque las matrices que la forman sean complejas. Las constantes de estructura en esta base son ${c_{ij}}^k = \varepsilon_{ijk}$ (usando $[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$), y por tanto es isomorfa al álgebra sobre $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial como producto de Lie. $\diamondsuit$

Ejemplo. El espacio vectorial L subtendido por σ_1 y σ_2 no define un álgebra matricial ya que no es cerrado bajo la operación de conmutación.

Teorema. (de Ado.) Toda álgebra de Lie (real o compleja) es isomorfa a un álgebra matricial (y por tanto es una subálgebra de $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ o $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ para algún n).

Definición. (Representación.) Una representación f de un álgebra de Lie L en un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie de L en un álgebra de operadores en V. La dimensión de la representación es la dimensión de V. La representación es fiel si es inyectiva. La representación es trivial si cada elemento del álgebra L está representado por el operador 0. La representación es unitaria si los operadores son antihermíticos.

Nótese que si la representación es fiel su núcleo es trivial y por tanto L es isomorfa a la imagen.

Definición. (Representación adjunta.) Sea L un álgebra de Lie. Se denomina representación adjunta (o álgebra adjunta) la que hace corresponder a cada $X \in L$ el operador lineal D_X definido sobre L mediante $D_X(Y) = (X,Y)$. Que es una representación, $[D_X, D_Y] = D_{(X,Y)}$, se deduce de la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} \forall X,Y,Z \in L \quad [D_X, D_Y](Z) &= (D_X D_Y - D_Y D_X)(Z) \\ &= (X,(Y,Z)) - (Y,(X,Z)) = ((X,Y),Z) = D_{(X,Y)}(Z) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Dado que $D : L \to \mathrm{End}(L)$ es una representación, la imagen $L_a = D(L)$ es un álgebra lineal, denominada álgebra adjunta. En general no es isomorfa a L, o equivalentemente, D no es fiel.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una base de L y sea $D_i = D_{X_i}$. Si $X = x^i X_i$ es un elemento cualquiera de L, $D_X = x^i D_i$ (aunque los D_i sólo son linealmente independientes si la representación adjunta es fiel). La matriz de D_i en la base X_j es $(D_i)^k{}_j = c_{ij}{}^k$. En efecto,

$$D_i(X_j) = (D_i)^k{}_j X_k = (X_i, X_j) = c_{ij}{}^k X_k \,. \tag{7.17}$$

Como D es una representación, se deduce que $[D_i, D_j] = c_{ij}{}^k D_k$ (esta identidad equivale a $c_{ij}{}^\ell c_{\ell k}{}^m + c_{jk}{}^\ell c_{\ell i}{}^m + c_{ki}{}^\ell c_{\ell j}{}^m = 0$). Es decir, las constantes de estructura forman una representación del álgebra L; la representación adjunta. Cuando la representación adjunta es fiel proporciona el álgebra matricial isomorfa a que se refiere el teorema de Ado.

8 Ley de composición

Sea G un grupo de Lie de dimensión n y sea U un entorno abierto de la identidad homeomorfo a un entorno abierto de $\mathbb{R}^n$ por el homeomorfismo ϕ. Se dice que ϕ (y por extensión U) es una carta local de G (en la identidad). A cada $g \in U$ le corresponde un $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = \phi(g)$. El conjunto de aplicaciones continuas ϕ^i definidas por $\phi^i(g) = x^i, \;\; i = 1, \dots, n$, se denomina un sistema de coordenadas de G en un entorno de la identidad y los x^i son la coordenadas de g en ese sistema de coordenadas. Los sistemas de coordenadas siempre se eligen de modo que $\phi(e) = 0$.

Definición. (Ley de composición.) Sea W un entorno abierto de e contenido en U tal que $W^2 \subseteq U$, es decir, si g_1 y g_2 son de W, $g_3 = g_1 g_2$ sea de U. Sean x, y y z las coordenadas de g_1, g_2 y g_3 respectivamente. Se denomina ley de composición a la función $f : \phi(W) \times \phi(W) \to \phi(U)$ tal que $z = f(x,y)$.

Nota 1. La ley de composición, a diferencia de la ley de multiplicación del grupo, sólo se refiere a un entorno de la identidad. Además su forma concreta depende del sistema de coordenadas.

Nota 2. En general convendrá considerar entornos abiertos W de e contenidos en U tales que W^n (n entero) esté contenido en U. Como W siempre existe (para n dado) eligiéndolo suficientemente pequeño, a partir de ahora no distinguimos entre U y W y procederemos como si $U^n \subseteq U$.

Análogamente existe un función h tal que si g tiene coordenadas x su inverso tiene coordenadas $h(x)$. De las definiciones de f y h se sigue

$$\forall x,y,z \in \phi(U), \quad f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z), \qquad \text{(asociativa)} \tag{8.1}$$

$$f(0,x) = f(x,0) = x, \qquad \text{(neutro)} \tag{8.2}$$

$$f(x,h(x)) = f(h(x),x) = 0, \qquad \text{(inverso)} \tag{8.3}$$

como consecuencia inmediata de la propiedad asociativa, de que 0 son las coordenadas del neutro, y $h(x)$ las coordenadas del inverso. La última igualdad proporciona $h(x)$ conocida la ley de composición f.

Definición. (Grupo local de Lie.) Se denomina grupo local de Lie a todo entorno abierto V de 0 en $\mathbb{R}^n$ con una ley de composición que cumpla las fórmulas anteriores. V es el dominio del grupo local. El producto sólo está definido en un abierto W de 0 contenido en V de modo que $W^2 \subseteq V$, por tanto, en general, un grupo local de Lie no es un grupo en sentido abstracto. Dos grupos locales de Lie son isomorfos si están relacionados por un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (es decir, un cambio de coordenadas continuo) en la intersección de sus dominios. $\diamondsuit$

Es inmediato que todo grupo de Lie define un grupo local de Lie. También se puede probar la afirmación recíproca: todo grupo local de Lie está asociado a un grupo de Lie (global).

Teorema. Dos grupos de Lie son localmente isomorfos si y sólo si admiten la misma ley de composición o equivalentemente si sus grupos locales son isomorfos. En particular un grupo y su grupo recubridor universal admiten la misma ley de composición.

En efecto, si son localmente isomorfos es posible elegir sendos sistemas de coordenadas en cada grupo de modo que los elementos relacionados por el isomorfismo local tengan las mismas coordenadas y por tanto la misma ley de composición. Y viceversa, si tienen la misma ley de composición deben tener la misma ley de multiplicación en sendos entornos de la identidad. $\diamondsuit$

Teorema. Todo grupo de Lie G admite un sistema de coordenadas, denominadas coordenadas analíticas, tal que las leyes de composición y del inverso son funciones analíticas de sus variables. Todo grupo de Lie es una variedad analítica.

Nótese que dicho sistema de coordenadas no es único. A partir de ahora supondremos que usamos un sistema de coordenadas analíticas.

La condición de analiticidad significa que las leyes de composición y del inverso son desarrollables en serie en torno a 0 y con radio de convergencia no nulo que contiene a $\phi(U)$:

$$
\begin{aligned}
f^i(x,y) &= \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \sum_{(j_1,\ldots,j_\ell)} \frac{1}{k!}\frac{1}{\ell!} \left[\frac{\partial^{k+\ell} f^i(x,y)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}\partial y^{j_1}\cdots\partial y^{j_\ell}} \right]_{x,y=0} x^{i_1}\cdots x^{i_k} y^{j_1}\cdots y^{j_\ell} \\
h^i(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k h^i(x)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}} \right]_{x=0} x^{i_1}\cdots x^{i_k}
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

Los índices $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_\ell$ van de 1 a n.

La condición de que f sea tal que $x=0$ represente al neutro implica:

$$
\begin{aligned}
f^i(x,y) &= x^i + y^i + a_{jk}{}^i x^j y^k + b_{jk\ell}{}^i x^j x^k y^\ell + d_{jk\ell}{}^i x^j y^k y^\ell + O(\xi^4), \\
h^i(x) &= -x^i + a_{jk}{}^i x^j x^k + (b_{jk\ell}{}^i - d_{jk\ell}{}^i - a_{jr}{}^i a_{k\ell}{}^r) x^j x^k x^\ell + O(\xi^4)\,,
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

donde $O(\xi^n)$ representa términos con n o más x^i o y^i o equivalentemente, términos de orden n en ξ si se reescalan todas las coordenadas de acuerdo con $x^i \to \xi x^i$. Como se verá después, las demás condiciones también restringen mucho la forma de f.

Ejemplo. Para el grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, los elementos de matriz pueden escribirse como $A_{ij} = \delta_{ij} + x_{ij}$ y usar x_{ij} como coordenadas en un entorno de la identidad. La ley de composición es $f_{ij}(x,y) = x_{ij} + y_{ij} + x_{ik}y_{kj}$.

Ejemplo. Para el grupo $\mathbb{R}^n$, él mismo define un sistema analítico de coordenadas, con ley de composición $f(x,y) = x+y$ y $h(x) = -x$.

Ejemplo. El grupo $\mathrm{U}(1)$ admite un sistema de coordenadas analíticas con $w = \exp(ix)$, $-\pi < x < \pi$, es decir $U = \mathrm{U}(1) - \{-E\}$. La ley de composición es $f(x,y) = x+y$ y $h(x) = -x$. Es decir, tiene la misma ley de composición que $(\mathbb{R},+)$. Nótese que la ley de composición tiene radio de convergencia infinito, sin embargo en el caso de $\mathrm{U}(1)$ sólo vale localmente (en un entorno del neutro) ya que la carta sólo está definida (unívocamente) para $|x| < \pi$; fuera de este rango habría coordenadas distintas correspondiendo al mismo elemento de $\mathrm{U}(1)$.

Ejemplo. (Ley de composición de $\mathrm{SU}(2)$.) Los elementos del grupo $\mathrm{SU}(2)$ son de la forma $A = x_0 E - i\vec{x}\vec{\sigma}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y $x_0^2 + \vec{x}^2 = 1$. Un sistema de coordenadas analíticas es el definido tomando la proyección del hemisferio norte sobre el plano ecuatorial, es decir, U caracterizado por $||\vec{x}|| < 1$ y $x_0 > 0$ y $A \mapsto \vec{x}$. En U la variable x_0 está unívocamente determinada: $x_0(\vec{x}) = +\sqrt{1-\vec{x}^2}$. Para obtener explícitamente la ley de composición, consideremos dos elementos con coordenadas $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$
\begin{aligned}
(a_0E - i\vec{a}\vec{\sigma})(b_0E - i\vec{b}\vec{\sigma}) &= a_0b_0E - i(a_0\vec{b} + b_0\vec{a})\vec{\sigma} - (\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) \\
&= (a_0b_0 - \vec{a}\vec{b})E - i(a_0\vec{b} + b_0\vec{a})\vec{\sigma} - i\vec{a}\times\vec{b}\,\vec{\sigma}
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

en donde se ha usado

$$
(\vec{a}\times\vec{b})^i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k\,, \qquad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k
\tag{8.7}
$$

De aquí se lee la ley de composición de $\mathrm{SU}(2)$ en este sistema de coordenadas:

$$\vec{f}(\vec{a},\vec{b}) = a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b}\,, \qquad \vec{h}(\vec{a}) = -\vec{a}\,. \tag{8.8}$$

Nótese que a_0 y b_0 son funciones analíticas de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente con radio de convergencia 1. De la ley de composición se ve que el grupo $\mathrm{SU}(2)$ no es abeliano. Nótese que como $\mathrm{SO}(3)$ es localmente isomorfo a $\mathrm{SU}(2)$ admite la misma ley de composición. $\diamondsuit$

9 Álgebra de Lie de un grupo de Lie

Sea G un grupo de Lie n-dimensional y sea $x^i(g)$ un sistema de coordenadas analíticas en un entorno de la identidad con ley de composición f. Recordemos que

$$f^i(x,y) = x^i + y^i + a_{jk}{}^i x^j y^k + b_{jk\ell}{}^i x^j x^k y^\ell + d_{jk\ell}{}^i x^j y^k y^\ell + O(\xi^4)\,. \tag{9.1}$$

donde, en particular,

$$a_{jk}{}^i = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial y^k}\Big|_{x=y=0} \tag{9.2}$$

Definición. (Constantes de estructura de un grupo de Lie.) A partir del desarrollo en serie de la ley de composición es inmediato que

$$[x,y]^i = (xyx^{-1}y^{-1})^i = c_{jk}{}^i x^j y^k + O(\xi^3) \tag{9.3}$$

donde

$$c_{ij}{}^k = a_{ij}{}^k - a_{ji}{}^k \tag{9.4}$$

se denominan constantes de estructura del grupo G asociadas a las coordenadas x^i. $\diamondsuit$

Notando que las constantes de estructura proporcionan el término dominante de $[x,y]$ es inmediato que bajo un cambio de coordenadas, $x^i \to x'^i(x)$, las constantes de estructura se transforman de acuerdo con

$$c'_{i'j'}{}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}} \frac{\partial x'^{k'}}{\partial x^k}\Big|_0 c_{ij}{}^k \tag{9.5}$$

Por tanto los números $c_{ij}{}^k$ forman las componentes de un tensor. El tensor abstracto es independiente de las coordenadas elegidas, sólo depende del grupo G. Nótese que los números $a_{ij}{}^k$ no definen un tensor. Por ejemplo, si el grupo es abeliano, es inmediato que las constantes de estructura se anulan, en cambio los números $a_{ij}{}^k$ pueden anularse en un sistema de coordenadas y no hacerlo en otro.

Otras propiedades de las constantes de estructura que se deducen de su definición son:

a) Las constantes de estructura son reales.

b) $c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k$.

c) $c_{ij}{}^{\ell} c_{\ell k}{}^{m} + c_{jk}{}^{\ell} c_{\ell i}{}^{m} + c_{ki}{}^{\ell} c_{\ell j}{}^{m} = 0$.

La última identidad es consecuencia de la asociatividad de la ley de composición. Para probarla basta calcular $(xy)z$ y $x(yz)$ usando el desarrollo en serie de la ley de composición hasta $O(\xi^4)$ e igualar términos de tercer orden.

Se concluye que las constantes de estructura corresponden a las de un álgebra de Lie real n-dimensional abstracta. Esta álgebra es intrínseca a G ya que cambios de coordenadas corresponden a cambios de base en el álgebra.

Es interesante dar también una realización natural del álgebra de Lie anterior y hacer una construcción intrínseca a G, es decir, sin usar unas coordenadas concretas.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y p un punto de M. Sea x^i, $i = 1, \dots, n$ un sistema de coordenadas diferenciables de M en un entorno de p asociado al homeomorfismo ϕ, es decir, las coordenadas de un punto cualquiera q en ese entorno son $x^i = \phi^i(q)$. Sin pérdida de generalidad se puede tomar $\phi(p) = 0$. Por definición, una función real g definida sobre un entorno de p es diferenciable si lo es cuando se expresa en algún sistema de coordenadas diferenciable, es decir, si $g_\phi(x) = g(\phi^{-1}(x))$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$ un entorno de 0. Frecuentemente se usa la misma notación para ambas funciones g y g_ϕ. Denotamos por $C^\infty(M, p)$ el álgebra de funciones reales diferenciables definidas en un entorno de p.

Definición. (Derivaciones.) Una derivación en p es una aplicación lineal D del conjunto $C^\infty(M, p)$ en $\mathbb{R}$ que satisfaga la regla de Leibniz, es decir

$$\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M, p), \quad D(f_1 f_2) = D(f_1) f_2(p) + f_1(p) D(f_2). \tag{9.6}$$

Las derivaciones en p también se denominan vectores tangentes a M en p. $\diamondsuit$

Definición. (Espacio tangente.) El espacio vectorial real formado por todas las derivaciones en p se denomina espacio tangente a M en p y se denota por T_pM.

Teorema. Sea x^i un sistema de coordenadas diferenciable y sea X_i la derivación definida por $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0$. El conjunto $\{X_i\}_{i=1}^n$ forma una base de T_pM.

En efecto, es evidente que los operadores $a^i X_i$, con $a \in \mathbb{R}^n$ son derivaciones. Los X_i son linealmente independientes: si $a^i X_i = 0$, $0 = a^i X_i(x^j) = a^j$. Para ver que toda derivación D se puede escribir como $D = a^i X_i$ notemos primero que $D(c) = 0$ para toda función constante c. Esto se deduce de la regla de Leibniz: $D(1) = D(1^2) = D(1)1 + 1D(1) = 2D(1) = 0$. Finalmente, toda función diferenciable g puede escribirse como $g(x) = g(0) + \sum_i x^i g_i(x)$ donde g_i son diferenciables. Es inmediato que $D(g)$ coincide con $a^i X_i(g)$ si $a^i = D(x^i)$. $\diamondsuit$

Por tanto las derivaciones o vectores tangentes son derivadas direccionales. Es inmediato que un cambio de coordenadas en M corresponde a un cambio de base en el espacio tangente:

$$X'_{i'} = S^i{}_{i'} X_i, \quad S^i{}_{i'} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}}\right)_0. \tag{9.7}$$

Sea $u(t)$ una curva en M que pase por p. Sin pérdida de generalidad nos podemos restringir al caso $u(0)=p$. Nótese sin embargo que distintas reparametrizaciones de t definen distintas curvas (aunque con la misma trayectoria y orientación). La curva es diferenciable, por definición, si lo son sus coordenadas $x^i(t)$ como funciones de t.

Definición. (Vector tangente a un curva.) Dada una curva diferenciable $u(t)$ se le puede asociar un vector tangente en p en forma natural mediante $D_u = \left(\frac{d}{dt}\right)_0$. Más explícitamente para cualquier función diferenciable g en un entorno de p

$$D_u(g) = \frac{dg(u(t))}{dt}\Big|_{t=0}. \tag{9.8}$$

Dado que

$$D_u(g) = \frac{\partial g(x)}{\partial x^i}\Big|_{x(t)} \frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_0, \tag{9.9}$$

se deduce que las componentes del vector tangente D_u en el sistema de coordenadas x^i son $(D_u)^i = \frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}$. El mismo resultado se obtiene en forma más simple aplicando D_u a las funciones diferenciables x^i. $\diamondsuit$

Es inmediato que todo vector tangente lo es a alguna curva (no única): La curva $x^i(t) = a^i t$ tiene vector tangente con componentes a^i.

Teorema. Sea G un grupo de Lie y sean $u(t)$, $v(t)$ dos curvas diferenciables en G que pasen por e con vectores tangentes D_u y D_v. Sea $w(s)$ la curva definida mediante $w(t^2) = u(t)v(t)u(t)^{-1}v^{-1}(t) = [u(t), v(t)]$. Denotamos esta curva por $[u,v]$. Esta curva es diferenciable y su vector tangente sólo depende de D_u y D_v. La operación definida por $(D_u, D_v) = D_w$ es un producto de Lie en el espacio tangente.

En efecto, sean $u^i(t)$, $v^i(t)$ las coordenadas de $u(t)$ y $v(t)$ y sean a^i, b^i sus vectores tangentes, entonces $u^i(t) = ta^i(t)$ con $a^i(0) = a^i$ y análogamente para $v(t)$. Usando $(xyx^{-1}y^{-1})^i = c_{jk}{}^i x^j y^k + O(\xi^3)$, se deduce

$$w^i(t^2) = (u(t)v(t)u(t)^{-1}v^{-1}(t))^i = c_{jk}{}^i u^j(t) v(t)^k + O(t^3) = t^2 c_{jk}{}^i a^j b^k + O(t^3) \tag{9.10}$$

y el vector tangente D_w tiene componentes $c^i = c_{jk}{}^i a^j b^k$. Como se ha visto antes $c = (a,b)$ define un producto de Lie. $\diamondsuit$

Definición. (Álgebra de Lie de un grupo de Lie.) El álgebra de Lie L_G de un grupo de Lie G es el álgebra de Lie definida en el espacio tangente T_eG mediante $(D_u, D_v) = D_{[u,v]}$.

En particular en la base X_i se tiene $(X_i, X_j) = c_{ij}{}^k X_k$ ya que X_i tiene componentes $a^m = \delta_i^m$ y por tanto $(X_i, X_j)^k$ es $c_{mn}{}^k \delta_i^m \delta_j^n = c_{ij}{}^k$. Si G es discreto su álgebra es 0. Si G es abeliano su álgebra es abeliana.

Ejemplo. (Álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.) Usando la ley de composición de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $f_{ij}(x,y) = x_{ij} + y_{ij} + x_{ik} y_{kj}$, se obtiene inmediatamente sus constantes de estructura:

$$c_{abcd}^{ij} = \delta_{ia}\delta_{kb}\delta_{kc}\delta_{jd} - \delta_{ic}\delta_{kd}\delta_{ka}\delta_{jb} = \delta_{cb}\delta_{ia}\delta_{jd} - \delta_{ad}\delta_{ic}\delta_{jb}\,, \tag{9.11}$$

que son las correspondientes a $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(2)$.) Usando la ley de composición de $\mathrm{SU}(2)$, $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = x_0\vec{y}+y_0\vec{x}+\vec{x}\times\vec{y}$, hasta segundo orden se tiene $a_{ij}{}^k = \varepsilon_{ijk}$ y $c_{ij}{}^k = 2\varepsilon_{ijk}$ en estas coordenadas. Por tanto el álgebra de Lie del grupo $\mathrm{SU}(2)$ es $\mathrm{su}(2)$.

Teorema. Sea G un grupo de Lie y L_G su álgebra de Lie. Sea H un subgrupo de G y N el subespacio tangente a H (es decir, los vectores tangentes en e a curvas contenidas en H). Entonces:

1) N es una subálgebra de L_G que es el álgebra de Lie de H.

2) Si H es un subgrupo invariante N es un ideal de L_G.

3) Si H es central, N es un ideal central de L_G.

En efecto,

1) Si u, v son curvas en H, $[u,v]$ también por ser H subgrupo. Por tanto $(D_u,D_v) = D_{[u,v]}$ se satisface dentro de N.

2) Si H es invariante, u es una curva en G y v un curva en H, la curva $[u,v]$ está en H, por tanto $(N,L_G)\subseteq N$.

3) Si H es central, u es una curva en G y v un curva en H, $[u,v]$ es la curva constante en e y su vector tangente es cero, luego $(N,L_G) = 0$ y N es central. $\diamondsuit$

Definición. (Subgrupo uniparamétrico.) Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo uniparamétrico H es un homomorfismo de $\mathbb{R}$ en G. Los elementos de H son de la forma $u(t)$ con $u(0) = e$ y $u(t_1)u(t_2) = u(t_1+t_2)$. H define una curva analítica en G. Análogamente se puede definir un subgrupo uniparamétrico local.

Es inmediato que todo grupo uniparamétrico local tiene asociado un vector tangente. También es cierto el recíproco: cada vector tangente define precisamente un grupo uniparamétrico (global). Esto se prueba escribiendo la ley de composición del grupo uniparamétrico en forma diferencial y mostrando que la solución existe y es única.

Definición. (Coordenadas canónicas.) Sea x^i un sistema de coordenadas y representemos por $\mathrm{g}(x)$ el elemento con coordenadas x (es decir, g es la función inversa de ϕ). Se dice que las coordenadas son canónicas si para todo x la curva $u(t) = \mathrm{g}(tx) = \mathrm{g}(tx^1,\dots,tx^n)$ es un grupo uniparamétrico.

En un sistema de coordenadas canónicas se tiene

$$\mathrm{g}(t_1x)\mathrm{g}(t_2x) = \mathrm{g}((t_1+t_2)x)\,, \quad \mathrm{g}(0) = e\,, \quad \mathrm{g}(x)^{-1} = \mathrm{g}(-x)\,. \tag{9.12}$$

Ejemplo. En el grupo $\mathrm{SO}(3)$, cada rotación puede parametrizarse en función de un eje de rotación caracterizado por un vector unitario $\hat{n}$, y ángulo de rotación ψ. El efecto de dos rotaciones sucesivas sobre el mismo eje con ángulos ψ_1 y ψ_2 es una rotación sobre el mismo eje de ángulo suma $\psi_1+\psi_2$. Por tanto el conjunto de tres coordenadas $\vec{x} = \psi\hat{n}$ es un sistema de coordenadas canónicas en $\mathrm{SO}(3)$. $\diamondsuit$

Teorema. Dada una base cualquiera $\{X_i\}_{i=1}^n$ del espacio tangente, existe precisamente un sistema de coordenadas canónicas tal que $X_i = \partial/\partial x^i|_0$.

Se deduce que hay una biyección entre bases y coordenadas canónicas. Igualmente se deduce que dado un sistema cualquiera de coordenadas, hay otro sistema de coordenadas canónicas, único, con los mismos vectores tangentes y por tanto idéntico al anterior hasta infinitésimos de primer orden.

Ejemplo. El grupo $\mathrm{O}(1,1)$ es el grupo de Lorentz en $1+1$ dimensiones. Es un grupo de Lie de dimensión 1. La componente de la identidad $\mathrm{SO}^{\uparrow}(1,1)$ está formada por matrices $\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}$, donde $-1 < v < 1$ es la velocidad y $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$. La velocidad define una coordenada analítica global para este grupo. La ley de composición de velocidades es $v_{12} = (v_1+v_2)/(1+v_1v_2)$. La coordenada canónica que coincide con v infinitesimalmente es $\xi = \mathrm{atanh}(v)$. La ley de composición en estas coordenadas se escribe $\xi_{12} = \xi_1 + \xi_2$. $\diamondsuit$

Hemos visto que todo grupo local de Lie define un álgebra de Lie. También se cumple el recíproco:

Teorema. (de Lie.) Toda álgebra de Lie real abstracta es el álgebra de Lie de un grupo local de Lie. Dos grupos locales de Lie con álgebras de Lie isomorfas son isomorfos.

En efecto, puede probarse que las propiedades a),b) y c) de las constantes de estructura, que son necesarias para que f sea la ley de composición de un grupo, son también suficientes: dadas unas constantes de estructura que satisfagan dichas condiciones de consistencia es posible construir una y única función f que sea la ley de composición de un grupo local de Lie en coordenadas canónicas (teoremas de Lie). $\diamondsuit$

En resumen, se deduce que hay una relación biunívoca entre:

1) Las clases de equivalencia de álgebras de Lie reales isomorfas.

2) Las clases de equivalencia de leyes de composición relacionadas por un cambio de coordenadas.

3) Las clases de equivalencia de grupos locales de Lie isomorfos.

4) Las clases de equivalencia de grupos de Lie localmente isomorfos.

5) Las clases de equivalencia de grupos de Lie conexos y simplemente conexos isomorfos.

Una consecuencia inmediata es el siguiente teorema

Teorema. Todo grupo de Lie conexo de dimensión 1 es abeliano. Todo grupo de Lie n-dimensional abeliano y conexo es homomorfo a $\mathbb{R}^n$.

En efecto, sólo hay un álgebra de Lie abstracta de dimensión 1, a saber, el álgebra abeliana. Ésta es el álgebra de Lie de $(\mathbb{R},+)$ que es el recubridor universal de la familia. Todo grupo de Lie conexo con la misma álgebra es un grupo cociente de $(\mathbb{R},+)$ y es abeliano. Si G es abeliano su álgebra es abeliana y por tanto es localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$ que es el recubridor universal de la familia, luego si G es conexo es un grupo cociente de $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Ejemplo. $\mathrm{SO}(2)$ es un grupo de Lie de dimensión 1 conexo y es abeliano. $\mathrm{O}(2)$ también es de dimensión 1 pero no es conexo y no es abeliano.

Otro teorema importante de reconstrucción del grupo a partir del álgebra es el siguiente:

Teorema. Sea G un grupo de Lie y L_G su álgebra de Lie. Toda subálgebra de L_G es el álgebra de Lie de precisamente un subgrupo conexo de G.

Nótese que el teorema se refiere a subálgebras concretas de un grupo concreto G, no módulo isomorfismos.

10 Funciones de matrices cuadradas

Definición. (Norma de A.) Sea A una matriz compleja $n \times n$. Definimos su norma como

$$||A|| = \max\left\{\frac{||Ax||}{||x||}, \quad x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0\right\}. \tag{10.1}$$

($||\ ||$ en $\mathbb{C}^n$ se refiere a $||\ ||_2$.) Siempre hay un vector que satura la cota (a saber, el autovector con el máximo autovalor de $A^\dagger A$, que es $||A||^2$). Esta norma cumple las propiedades básicas:

1) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$,

2) $||zA|| = |z|\,||A||$

3) $||A|| = 0$ si y sólo si $A = 0$.

Además $||AB|| \leq ||A||\,||B||$, ya que $||A(Bx)|| \leq ||A||\,||Bx|| \leq ||A||\,||B||\,||x||$. $\diamondsuit$

Definición. (Función de una matriz.) Sea A una matriz y $f(z)$ una función compleja analítica en 0 y sean c_k, $k = 0, 1, \dots$ los coeficientes de su desarrollo en serie de Taylor. Se define la matriz $f(A)$ como

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k \tag{10.2}$$

siempre que la serie converja absolutamente (en el sentido de la norma dada más arriba).

Teorema. Una condición suficiente para la existencia de $f(A)$ es $||A|| < R$, siendo R el radio de convergencia de $f(z)$.

En efecto, usando $||A^k|| \leq ||A||^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||c_k A^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\,||A||^k, \tag{10.3}$$

y esta serie converge si $||A|| < R$. $\diamondsuit$

Como se verá después, la condición necesaria para la convergencia es que todas las raíces de la ecuación característica de A estén dentro de un radio R del origen. Se deduce que si $f(z)$ es un función entera $f(A)$ existe para toda matriz A. En particular la matriz $\exp(A)$ está bien definida.

Teorema. Si S es una matriz no singular

$$f(SAS^{-1}) = Sf(A)S^{-1} \tag{10.4}$$

siempre que ambas series converjan absolutamente.

En efecto, ya que $(SAS^{-1})^k = SA^kS^{-1}$ para $k = 0, 1, \dots$ y las series $f(SAS^{-1})$ y $Sf(A)S^{-1}$ coinciden término a término. (Nótese que si S no es unitaria $||A||$ y $||SAS^{-1}||$ pueden ser distintas.) $\diamondsuit$

La definición puede extenderse a aplicaciones lineales $\hat{A} : V \to V$. Sea A la matriz de $\hat{A}$ en alguna base. La aplicación $f(\hat{A})$ se define como aquélla que tiene por matriz $f(A)$ cuando exista. La definición no depende de la base por el teorema anterior.

Teorema. (Forma de Jordan.) Toda matriz A compleja $n \times n$ es semejante a otra matriz A_J en forma estándar de Jordan, a saber $A_J = \bigoplus_{k=1}^N J_{d_k}(a_k)$, donde cada bloque es una matriz $d \times d$ definida como $J_d(a) = aE_d + S_d$, siendo $(E_d)_{ij} = \delta_{ij}$ y $(S_d)_{ij} = \delta_{i,j-1}$, es decir

$$J_d(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} . \tag{10.5}$$

Esta forma es única salvo reordenación de los bloques. $\diamondsuit$

Es inmediato que los números a_k son raíces de la ecuación característica y que hay precisamente un autovector por cada bloque. La matriz es diagonalizable si y sólo si cada bloque es de dimensión 1.

Como cada bloque conmuta con los otros, se deduce que $f(A_J) = \bigoplus_{k=1}^N f(J_{d_k}(a_k))$. Escribiendo $J_d(a) = aE_d + S_d$ y notando que $(S_d)^k = 0$ si $k \geq d$, tenemos

$$f(J_d(a)) = f(aE_d + S_d) = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) S_d^k . \tag{10.6}$$

Esta fórmula se puede tomar como una definición más general de $f(A)$ ya que sólo requiere que $f(z)$ tenga derivadas de orden $k < d$ en cada autovalor a; no hace falta que $f(z)$ sea analítica. En particular si A es diagonalizable con valores propios a_k y vectores propios correspondientes $|a_k\rangle$, $k = 1, \dots, n$, la matriz $f(A)$ queda definida por $f(A)|a_k\rangle = f(a_k)|a_k\rangle$.

Nótese que $f(A_J)$ es una matriz triangular superior pero no está en forma de Jordan en general. También es interesante dar una expresión que no dependa de la base:

Teorema. Sea A es una matriz cuadrada, $f(z)$ una función analítica en los puntos del espectro de A y Γ una suma de contornos cerrados orientados positivamente alrededor de cada punto del espectro de A. Entonces

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{1}{z-A}\mathrm{d}z\,. \tag{10.7}$$

Si hay una región del plano complejo que contenga todo el espectro de A en la que $f(z)$ sea analítica, se puede tomar Γ como un único contorno cerrado positivo que encierre al espectro.

En efecto, como la definición no depende de la base basta calcular la integral para A en forma de Jordan para cada bloque $J_{d_k}(a_k)$. La matriz $(z-J_d(a))^{-1}$ se obtiene fácilmente por aplicación de la fórmula de $f(J_d(a))$ para la función $f(w) = (z-w)^{-1}$, a saber

$$\frac{1}{z-J_d(a)} = \sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}S_d^k\,. \tag{10.8}$$

Si se utiliza ahora la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{(z-a)^{k+1}}f(z)dz = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\,, \tag{10.9}$$

se reobtiene la fórmula de $f(J_d(a))$. $\diamondsuit$

Teorema. (Igualdad de Jacobi.) Para toda matriz cuadrada A,

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))\,. \tag{10.10}$$

En efecto, como el determinante y la traza no dependen de la base, basta probarlo para A en la forma de Jordan. Si los elementos diagonales de A son λ_j, $j = 1,\dots,n$, $\exp(A)$ será un matriz triangular superior con elementos diagonales $\exp(\lambda_j)$, entonces,

$$\det(\exp(A)) = \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_j) = \exp(\sum_{j=1}^n \lambda_j) = \exp(\mathrm{tr}(A))\,. \qquad \diamondsuit \tag{10.11}$$

Equivalentemente se tiene $\mathrm{tr}(\log(B)) = \log(\det(B))$ eligiendo adecuadamente la hoja de Riemann de $\log(z)$. Del teorema se deduce que $\exp(A)$ es siempre una matriz no singular. Además si A tiene traza 0, $\exp(A)$ es una matriz unimodular (con determinante 1).

Teorema. Si A y B conmutan, $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

En efecto, la igualdad vale cuando A y B son números complejos, por tanto las dos series $\exp(A+B)$ y $\exp(A)\exp(B)$ deben coincidir término a término cuando se desarrollan y se reordenan poniendo A a la izquierda y B a la derecha (por ejemplo). Las mismas manipulaciones se pueden hacer en el caso de matrices cuando éstas conmutan. $\diamondsuit$

En particular $\exp(A)\exp(-A) = E$.

Teorema. Sea A una matriz cuadrada compleja y f una función entera:

1) $(f(A))^* = f^*(A^*)$.

2) $(f(A))^T = f(A^T)$

3) $(f(A))^\dagger = f^*(A^\dagger)$

En efecto, las igualdades son inmediatas término a término usando $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$, $(AB)^* = A^* B^*$ para la primera, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(AB)^T = B^T A^T$ para la segunda y $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$, $(\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ para la tercera. $f^*(z)$ es la función $\sum_{k=0}^\infty c_k^* z^k$. $\diamondsuit$

Como consecuencia se tiene que

1) Si A es antisimétrica, $\exp(A)$ es ortogonal, ya que

$$\exp(A)^T = \exp(A^T) = \exp(-A) = (\exp(A))^{-1} . \tag{10.12}$$

2) Si A es antihermítica, $\exp(A)$ es unitaria, ya que

$$\exp(A)^\dagger = \exp(A^\dagger) = \exp(-A) = (\exp(A))^{-1} . \tag{10.13}$$

Definición. (Operador adjunto.) Sea V el espacio de matrices complejas $n \times n$. Para cada matriz A en V se define un operador lineal en V, D_A, denominado operador adjunto de A, mediante

$$D_A(B) := [A,B] . \tag{10.14}$$

La aplicación $A \mapsto D_A$ es la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Frecuentemente se usa la notación $\mathrm{Ad}A$ para denotar al operador adjunto. No debe confundirse $\mathrm{Ad}A$ con $A^\dagger$. Nótese que $\mathrm{Ad}A$ equivale a una matriz $n^2 \times n^2$. $\diamondsuit$

Teorema. (Campbell-Hausdorff.) Sean X e Y matrices $n \times n$ en un entorno suficientemente pequeño de 0 (de modo que el logaritmo sea univaluado). Entonces

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = Y + \int_0^1 F(e^{tD_X} e^{D_Y})(X)\, \mathrm{d}t , \tag{10.15}$$

donde

$$F(z) = \frac{\log(z)}{z-1} . \tag{10.16}$$

La fórmula también se puede escribir en la forma

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = X + \int_0^1 F(e^{-tD_Y}e^{-D_X})(Y)\,\mathrm{d}t\,. \tag{10.17}$$

Esta fórmula se deduce de la anterior usando la identidad

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = -\log(\exp(-Y)\exp(-X))\,. \tag{10.18}$$

Lema 1: $e^A B e^{-A} = e^{D_A} B$.

En efecto, sea $B(t) := e^{tA} B e^{-tA}$,

$$\begin{aligned} \frac{dB(t)}{dt} &= e^{tA}(AB - BA)e^{-tA} = e^{tA}(D_A B)e^{-tA}, \\ \frac{d^n B(t)}{dt^n} &= e^{tA}(D_A^n B)e^{-tA}, \\ B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tA}\frac{1}{n!}\frac{d^n B(0)}{dt^n}t^n = e^{tD_A}B. \qquad \diamondsuit \end{aligned} \tag{10.19}$$

Lema 2: $e^X e^Y = e^Z$ implica $e^{D_X} e^{D_Y} = e^{D_Z}$.

En efecto, $e^{D_Z} A = e^Z A e^{-Z} = e^X e^Y A e^{-Y} e^{-X} = e^{D_X} e^{D_Y} A$. $\quad\diamondsuit$

Lema 3: Si dY es un infinitésimo de primer orden, $e^X e^{dY} = e^{X+dX}$ con

$$dX = \frac{D_X}{1 - e^{-D_X}} dY\,. \tag{10.20}$$

Es decir,

$$dX = dY + \frac{1}{2}[X, dY] + \frac{1}{12}[X, [X, dY]] + \cdots \tag{10.21}$$

o también

$$dY = \frac{1 - e^{-D_X}}{D_X} dX = dX - \frac{1}{2}[X, dX] + \frac{1}{3!}[X, [X, dX]] + \cdots \tag{10.22}$$

En efecto, se define $dY(t)$ tal que

$$e^{tX} e^{dY(t)} = e^{t(X+dX)}\,, \quad dY(0) = 0\,, \quad dY(1) = dY\,. \tag{10.23}$$

$$\begin{aligned} e^{-tX} e^{t(X+dX)} &= e^{dY(t)} = 1 + dY(t), \\ \frac{d}{dt}(dY(t)) &= e^{-tX}(-X + X + dX)e^{t(X+dX)} = e^{-tX} dX e^{tX} = e^{-tD_X} dX, \\ dY = dY(0) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt}(dY(t)) &= \int_0^1 dt\, e^{-tD_X} dX = \frac{1 - e^{-D_X}}{D_X} dX. \qquad \diamondsuit \end{aligned} \tag{10.24}$$

Demostración del teorema de Campbell-Hausdorff: El teorema afirma que $e^X e^Y = e^Z$ con

$$Z = X + \int_0^1 F(e^{-tD_Y} e^{-D_X}) Y dt \tag{10.25}$$

y $F(z) = \log(z)/(z-1)$.

En efecto, sea $e^{Z(t)} := e^X e^{tY}$, $Z(0) = X$, $Z(1) = Z$.

$$\begin{aligned}
&e^{Z(t+dt)} = e^{Z(t)+dZ(t)} = e^X e^{(t+dt)Y} = e^X e^{tY} e^{Y dt} = e^{Z(t)} e^{Y dt}, \\
&\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{D_{Z(t)}}{1-e^{-D_{Z(t)}}} Y = \frac{\log(e^{-D_{Z(t)}})}{1-e^{-D_{Z(t)}}} Y = F(e^{-D_{Z(t)}}) Y = F(e^{-tD_Y} e^{-D_X}) Y, \\
&Z(t) = X + \int_0^t dt\, F(e^{-tD_Y} e^{-D_X}) Y. \qquad \diamondsuit
\end{aligned} \tag{10.26}$$

Lo verificamos hasta orden 3 inclusive. Sea $Z = \log(e^X e^Y)$. Usando el desarrollo en serie de la exponencial se tiene

$$\begin{aligned}
e^Z &= (1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + O(\xi^4))(1 + Y + \frac{1}{2!}Y^2 + \frac{1}{3!}Y^3 + O(\xi^4)) \\
&= 1 + X + Y + \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{2}X^2 Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{3!}Y^3 + O(\xi^4).
\end{aligned} \tag{10.27}$$

Usando ahora $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$, y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
Z &= X + Y + \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{2}X^2 Y + \frac{1}{2}XY^2 + \frac{1}{3!}Y^3 \\
&\quad - \frac{1}{2}(X + Y + \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2)^2 + \frac{1}{3}(X+Y)^3 + O(\xi^4) \\
&= X + Y + \frac{1}{2}XY - \frac{1}{2}YX \\
&\quad + \frac{1}{12}X^2 Y + \frac{1}{12}XY^2 + \frac{1}{12}Y^2 X + \frac{1}{12}YX^2 - \frac{1}{6}XYX - \frac{1}{6}YXY + O(\xi^4) \\
&= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + O(\xi^4).
\end{aligned} \tag{10.28}$$

A comparar con el resultado de la fórmula de Campbell-Hausdorff. Notando que

$$F(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 + O(z^3), \tag{10.29}$$

$$
\begin{aligned}
Z &= Y + \int_0^1 F(e^{tD_X} e^{D_Y})(X)\,\mathrm{d}t \\
&= Y + \int_0^1 F(1 + tD_X + D_Y + \frac{1}{2}t^2 D_X^2 + tD_X D_Y + \frac{1}{2}D_Y^2 + O(\xi^3))(X)\,\mathrm{d}t \\
&= Y + \int_0^1 (1 - \frac{1}{2}(tD_X + D_Y + \frac{1}{2}t^2 D_X^2 + tD_X D_Y + \frac{1}{2}D_Y^2) \\
&\quad + \frac{1}{3}(tD_X + D_Y)^2 + O(\xi^3))(X)\,\mathrm{d}t \\
&= Y + \int_0^1 (1 - \frac{1}{2}tD_X - \frac{1}{2}D_Y \\
&\quad + \frac{1}{12}t^2 D_X^2 - \frac{1}{6}tD_X D_Y + \frac{1}{12}D_Y^2 + \frac{1}{3}tD_Y D_X + O(\xi^3))(X)\,\mathrm{d}t \\
&= Y + X - \frac{1}{2}D_Y(X) - \frac{1}{12}D_X D_Y(X) + \frac{1}{12}D_Y^2(X) + O(\xi^4)) \\
&= X + Y + \frac{1}{2}D_X(Y) + \frac{1}{12}D_X^2(Y) + \frac{1}{12}D_Y^2(X) + O(\xi^4)). \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
\tag{10.30}
$$

11 Álgebras de Lie de grupos de Lie lineales

La relevancia de los grupos de Lie lineales se basa en el siguiente teorema de reconstrucción:

Teorema. Toda álgebra de Lie abstracta lo es de un grupo de Lie lineal. Todo grupo de Lie es localmente isomorfo a un grupo de Lie lineal.

En efecto, por el teorema de Ado, toda álgebra de Lie real n-dimensional es isomorfa a un álgebra L formada por matrices $d \times d$ para algún d. L es una subálgebra de $\mathrm{gl}(d,\mathbb{R})$ que es el álgebra de Lie de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$. Por tanto hay un grupo de Lie lineal G, subgrupo de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, que tiene L como álgebra de Lie. La segunda afirmación es una consecuencia inmediata de la primera. $\diamondsuit$

Se deduce que a efectos locales, los grupos de Lie se pueden tratar como grupos de matrices. Esto es muy conveniente ya que el producto en el grupo corresponde al producto de matrices y el producto de Lie en el álgebra lineal corresponde al conmutador. Esto permite entender más fácilmente la naturaleza del espacio tangente, el álgebra de Lie del grupo, las coordenadas canónicas y la reconstrucción del grupo local a partir del álgebra.

Nótese que todo grupo admite una representación fiel en términos de operadores mediante la representación regular: $V = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ y $(T_g^L f)(x) = f(g^{-1}x)$. Sin embargo, esta representación es de dimensión infinita excepto para grupos finitos.

En lo que sigue G representará un grupo de Lie de matrices, x un sistema de coordenadas analíticas y $\mathrm{g}(x)$ el elemento con coordenadas x.

Teorema. Sea $h(t)$ un subgrupo uniparamétrico de G. $h(t)$ es una función matricial analítica de t.

En efecto, todo subgrupo uniparamétrico de matrices lo es de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ luego basta probarlo en este caso. Usando como coordenadas $\mathrm{g}_{ij}(x) = \delta_{ij} + x_{ij}$ la función matricial $\mathrm{g}(x)$ es una función analítica de x. Es inmediato que esta propiedad se conserva bajo cambios de coordenadas analíticos luego vale en cualquier sistema de coordenadas analíticas. Eligiendo x como un sistema de coordenadas canónicas, se deduce que todo grupo uniparamétrico $h(t) = \mathrm{g}(tx)$ define una función analítica en t. $\diamondsuit$

Definición. (Generadores infinitesimales.) Las matrices X_i, $i = 1, \ldots, n$ definidas por

$$X_i = \frac{\partial \mathrm{g}(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=0}. \tag{11.1}$$

se denominan generadores infinitesimales de G en el sistema de coordenadas x. $\diamondsuit$

Por el teorema anterior, las derivadas que definen X_i existen en un sistema de coordenadas canónicas, y por tanto en cualquier otro sistema de coordenadas analíticas.

Teorema. Sea x un sistema de coordenadas canónicas y X_i, $i = 1, \ldots, n$ sus generadores infinitesimales. Entonces $\mathrm{g}(x) = \exp(X)$, donde $X = x^i X_i$.

En efecto, usando la propiedad característica de las coordenadas canónicas, a saber, $\mathrm{g}(sx)\mathrm{g}(tx) = \mathrm{g}((s+t)x)$, y derivando respecto s en $s = 0$ se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d\mathrm{g}(tx)}{dt} = x^i X_i \mathrm{g}(tx), \quad \mathrm{g}(0) = 1. \tag{11.2}$$

La ecuación diferencial es lineal de primer orden y tiene como única solución $\mathrm{g}(tx) = \exp(tX)$. La proposición resulta de tomar $t = 1$. $\diamondsuit$

Como corolario $\mathrm{g}(x)$ es una función matricial analítica en un sistema de coordenadas canónicas, y por tanto en cualquier otro sistema de coordenadas analíticas.

Teorema. Sea L el espacio vectorial real subtendido por los generadores infinitesimales del grupo lineal G. Hay un isomorfismo natural entre L y el espacio tangente T_eG.

En efecto, sea x un sistema de coordenadas canónicas.

1) Las matrices X_i son linealmente independientes: supongamos que $a^i X_i = 0$. Entonces $\mathrm{g}(ta) = \exp(ta^i X_i) = 1$, pero como x es un sistema de coordenadas y ta está en el dominio de la carta local para t suficientemente pequeño, debe ser $ta = 0$ y $a^i = 0$.

2) Si $\hat{X}_i$ son los vectores tangentes asociados a cada coordenada x^i, podemos establecer un isomorfismo de espacios vectoriales mediante $a^i X_i \mapsto a^i \hat{X}_i$. Este isomorfismo es natural ya que no depende de las coordenadas elegidas: un cambio de coordenadas $x \to y$ en G induce un mismo cambio de base en ambos espacios, a saber

$$Y_j = S^i_j X_i, \quad S^i_j = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_0. \qquad \diamondsuit \tag{11.3}$$

Como los X_i son linealmente independientes, se deduce que en un entorno de la identidad cada elemento $X = x^i X_i$ de L etiqueta un elemento de G, a saber $\exp(X)$. Nótese que para todo $X \in L$, $\exp(X) \in G$ (ya que $\exp(X) = (\exp(\frac{1}{N}X))^N$ y se puede tomar N suficientemente grande de modo que $\frac{1}{N}x^i$ esté dentro de la carta canónica) pero sólo está garantizado que la relación es biunívoca en un entorno de la identidad.

Del teorema se sigue que podemos identificar el espacio formado por los generadores infinitesimales L con el espacio tangente T_eG. Nótese que un mismo conjunto de generadores infinitesimales corresponde a distintos sistemas de coordenadas de los cuales precisamente uno es canónico. Veamos que el isomorfismo también ocurre a nivel de álgebras de Lie:

Teorema. Sea G un grupo de Lie lineal, L_G su álgebra de Lie (sobre T_eG) y L el espacio vectorial de matrices subtendido por generadores infinitesimales de G.

1) L forma un álgebra de Lie lineal.

2) El isomorfismo natural entre L y L_G es un isomorfismo de álgebras de Lie.

En efecto, sea X_i una base de L y sean $X = x^i X_i$ e $Y = y^i X_i$. Tanto $\exp(X)$ como $\exp(Y)$ son elementos de G y también lo es $\exp(Z) = \exp(X)\exp(Y)\exp(-X)\exp(-Y)$, donde $Z = z^i X_i$. Por la teoría general de grupos de Lie se tiene

$$z^i = c_{jk}{}^i x^j y^k + O(\xi^3)\,. \tag{11.4}$$

Por otro lado calculando Z hasta segundo orden se tiene

$$\begin{aligned}
e^Z &= e^X e^Y e^{-X} e^{-Y} \\
&= (1+X+\frac{1}{2}X^2)(1+Y+\frac{1}{2}Y^2)(1-X+\frac{1}{2}X^2)(1-Y+\frac{1}{2}Y^2)+O(\xi^3) \\
&= (1+X+Y+\frac{1}{2}X^2+XY+\frac{1}{2}Y^2)(1-X-Y+\frac{1}{2}X^2+XY+\frac{1}{2}Y^2)+O(\xi^3) \\
&= 1+[X,Y]+O(\xi^3) \\
&= \exp([X,Y]+O(\xi^3)),
\end{aligned} \tag{11.5}$$

de donde

$$Z = [X,Y]+O(\xi^3). \tag{11.6}$$

Igualando términos de segundo orden se obtiene $[x^j X_j, y^k X_k] = c_{jk}{}^i x^j y^k X_i$ y

$$[X_j, X_k] = c_{jk}{}^i X_i\,. \qquad \diamondsuit \tag{11.7}$$

[AQUÍ VER ALGUNAS ÁLGEBRAS CLÁSICAS Y CALCULAR SU DIMENSIÓN] (11.8)

Como se vio, el grupo de Lie local puede reconstruirse módulo isomorfismos a partir de su álgebra de Lie abstracta (es decir, de las constantes de estructura). Esto implica que la ley de composición en un grupo de Lie lineal, $e^Z = e^X e^Y$, debe poder obtenerse exclusivamente a partir de la estructura de álgebra de Lie de L, es decir, sabiendo calcular sólo $[X,Y]$ para cualesquiera dos elementos de L, sin usar la ley de multiplicación de matrices XY que en general no es una operación interna en L.

Teorema. La ley de composición en G está determinada por las constantes de estructura de L.

En efecto, sea $z(x,y)$ la ley de composición en coordenadas canónicas y $Z = \log(e^X e^Y)$. La fórmula de Campbell-Hausdorff

$$\begin{aligned} Z &= Y + \int_0^1 F(e^{tD_X} e^{D_Y})(X)\,\mathrm{d}t \\ &= X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \cdots , \end{aligned} \tag{11.9}$$

implica que Z puede calcularse usando sólo el producto de Lie en L. También demuestra que $Z \in L$ si X e Y lo son y L es un álgebra de Lie. $\diamondsuit$

Como todos los grupos de Lie son localmente isomorfos a grupos de matrices, se puede decir que todo grupo de Lie a nivel local es la exponencial de su álgebra de Lie. Este resultado es notable ya que el álgebra sólo depende de un número finito de números, las constantes de estructura, y además módulo cambios de base.

Ejemplo. No hay grupos de Lie con la topología de S^2.

En efecto, como S^2 es un espacio simplemente conexo, un grupo de Lie definido en esta variedad sería el recubridor universal de su clase. Consideremos todas las álgebras de Lie de dimensión 2. Sean X e Y los generadores. El álgebra está caracterizada por ciertos x, y tales que $[X,Y] = xX + yY$. Si $x = y = 0$ el álgebra es abeliana. Supongamos que $y \neq 0$ (por ejemplo), entonces $X' = y^{-1}X$ e $Y' = xy^{-1}X + Y$ forman una nueva base con $[X',Y'] = Y'$. Por tanto sólo hay dos álgebras de Lie de dimensión 2. La abeliana y el álgebra $[X_1,X_2] = X_2$. En el primer caso el recubridor universal es el grupo $(\mathbb{R}^2,+)$ y no es homeomorfo a S^2. Veamos el segundo. Una representación fiel viene dada por la representación adjunta, $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. El espacio L está formado por matrices $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$. El grupo conexo correspondiente a esta representación está formado por las matrices $\exp(X)$. Usando $X^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}$, $k > 0$ resulta:

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b\frac{e^a-1}{a} & e^a - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b\frac{e^a-1}{a} & e^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & e^x \end{pmatrix}. \tag{11.10}$$

Las coordenadas a, b son canónicas por construcción y las coordenadas x, y son otras con los mismos vectores tangentes en la identidad. La carta $-\infty < x,y < +\infty$ es una carta global para el grupo que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Luego es simplemente conexo y es el recubridor de su clase. Ninguna de las álgebras tiene por grupo recubridor un grupo con la topología de S^2. $\diamondsuit$

Se vio que había una relación entre subgrupos de Lie y subálgebras de Lie. Veamos más relaciones de este tipo:

Teorema. Un homomorfismo local de grupos de Lie induce un homomorfismo en sus álgebras de Lie. Si el primero es inyectivo o sobreyectivo el segundo también. Un isomorfismo local induce un isomorfismo de álgebras.

En efecto, dado que se trata de una propiedad local, podemos restringirnos a grupos de matrices y sus álgebras lineales. Sean G y G^* dos grupos de Lie lineales con álgebras de Lie L y L^*, y sea α_G un homomorfismo local de G en G^*. Dado que la relación $X \in L \mapsto \exp(X) \in G$ (ídem L^*, G^*) es biunívoca en un entorno de la identidad, α_G puede extenderse a las álgebras (dentro de los dominios de las cartas) en forma natural mediante

$$\exp(\alpha_L(X)) = \alpha_G(\exp(X)) \,. \tag{11.11}$$

Dado que $h(t) = \exp(tX)$ es un subgrupo uniparamétrico, su imagen $h^*(t) = \alpha_G(h(t))$ también, de donde $h^*(t) = \exp(tX^*)$ y $tX^* = \alpha_L(tX)$ y por consistencia cuando $t = 1$ se deduce

$$\alpha_L(tX) = t\alpha_L(X) \,. \tag{11.12}$$

Esto permite extender la definición a todo L. Obviamente si α_G es inyectivo o sobreyectivo, α_L también. Hay que probar que $\alpha_L : L \to L^*$ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Partimos de:

$$\alpha_G(e^X e^Y) = \alpha_G(e^X)\alpha_G(e^Y) = e^{\alpha_L(X)} e^{\alpha_L(Y)}. \tag{11.13}$$

Usando la fórmula de Campbell-Hausdorff:

$$\begin{aligned} \alpha_G(e^X e^Y) &= \alpha_G(e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+O(\xi^3)}) = e^{\alpha_L(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+O(\xi^3))}, \\ e^{\alpha_L(X)} e^{\alpha_L(Y)} &= e^{\alpha_L(X)+\alpha_L(Y)+\frac{1}{2}[\alpha_L(X),\alpha_L(Y)]+O(\xi^3)}, \end{aligned} \tag{11.14}$$

de donde

$$\alpha_L(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]) = \alpha_L(X)+\alpha_L(Y)+\frac{1}{2}[\alpha_L(X),\alpha_L(Y)]+O(\xi^3). \tag{11.15}$$

La propiedad $\alpha_L(tX) = t\alpha_L(X)$ permite igualar cada orden por separado. A orden 1 se deduce que α_L es una aplicación lineal. A orden 2 se deduce que es un homomorfismo de álgebras de Lie lineales. Si α_G es un isomorfismo α_L también. $\diamondsuit$

Teorema. Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo invariante y L, N sus álgebras de Lie. Entonces el álgebra de G/H es isomorfa a L/N.

En efecto, de nuevo nos podemos restringir a grupos y álgebras matriciales. Consideremos la proyección $\pi : G \to G/H$ que es un homomorfismo sobreyectivo. Por el teorema anterior hay un homomorfismo sobreyectivo α de álgebras de Lie de L en el álgebra del grupo cociente $L' = \alpha(G/H)$. El núcleo de α está formado por las matrices X de L tales que $\pi(\exp(X)) = 1$ es decir $\exp(X) \in H$ y por tanto $X \in N$. Entonces $L/N \simeq L'$. $\diamondsuit$

Como se ha visto una representación de G da lugar a una representación de L_G. Por tanto conviene buscar representaciones del álgebra para obtener las del grupo. Un importante teorema desde el punto de vista práctico es el siguiente:

Teorema. Sea G un grupo de Lie conexo. Una representación de su álgebra de Lie induce una representación (lineal) del grupo recubridor y una representación (en general multivaluada) de G.

En efecto, sea T_L una representación del álgebra de Lie de G. Se define $T_G(\exp(X)) = \exp(T_L(X))$. Esta es una representación local de G ya que por la fórmula de Campbell-Hausdorff

$$\begin{aligned} T_G(\exp(X))T_G(\exp(Y)) &= \exp(T_L(X))\exp(T_L(Y)) = \exp(T_L(Z)) = T_G(\exp(Z)) \\ &= T_G(\exp(X)\exp(Y)). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Automáticamente también es una representación local del grupo recubridor universal. Por otro lado, todo homomorfismo local del grupo recubridor se puede extender unívocamente a uno global que será multivaluado para G. $\diamondsuit$

Nótese que si T_L es fiel, T_G es localmente fiel pero no necesariamente globalmente fiel.

Ejemplo. La representación fundamental de so(3) es una representación fiel de $\mathrm{su}(2)$ pero SO(3) es una representación localmente fiel de $\mathrm{SU}(2)$ que no es globalmente fiel: $\pi(\pm E) = E$.

Teorema. La representación T_L es irreducible si y sólo si T_G lo es.

En efecto, si V es un subespacio invariante de X en T_L, también es invariante bajo $\exp(X)$ (G conexo). Y viceversa, si V es invariante bajo todo $\exp(X)$ de T_G también lo será bajo $X = \frac{d}{dt}\exp(tX)\big|_0$. $\diamondsuit$

Ejemplo. Obtener las representaciones irreducibles complejas de dimensión finita del grupo

$$G = \left\{ \mathrm{g}(a,b) = \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R} \right\}. \tag{11.17}$$

Basta calcular las representaciones irreducibles de dimensión finita de su álgebra. Los generadores infinitesimales son

$$X_a = \frac{\partial}{\partial a}\mathrm{g}(a,b)\Big|_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.18}$$

El álgebra de Lie es por tanto $[A,B] = B$. Sea V el espacio en el que actúan A y B y sea $|\lambda\rangle$ un vector propio no nulo de A con valor propio λ (que siempre existe en el caso complejo si $\dim V$ no es 0): $A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$. Entonces

$$AB|\lambda\rangle = (BA+B)|\lambda\rangle = (\lambda+1)B|\lambda\rangle. \tag{11.19}$$

Se deduce que $|\lambda+1\rangle = B|\lambda\rangle$ o bien es 0 o bien es un vector propio de A con valor propio $\lambda+1$ y por tanto linealmente independiente de λ. Repitiendo el proceso, si la representación es de dimensión finita ocurrirá finalmente para cierto $\alpha = \lambda + n$

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad B|\alpha\rangle = 0. \tag{11.20}$$

En este caso $|\alpha\rangle$ genera un espacio V_1 unidimensional invariante bajo A y B. Si la representación es irreducible $V = V_1$, $A = \alpha$ y $B = 0$. Es decir, las únicas representaciones irreducibles complejas de dimensión finita de este grupo son unidimensionales, además $D_\alpha(a,b) = e^{\alpha a}$ (ya que $\mathrm{g}(a,0)$ es un subgrupo uniparamétrico) y el número complejo α caracteriza la representación. Ninguna de estas representaciones es fiel. Nótese que X_a, X_b forman una representación fiel (son linealmente independientes) pero reducible. $\diamondsuit$

Definición. (Representación adjunta.) Sea G un grupo lineal de Lie y L su álgebra de Lie. A todo $g \in G$ le asociamos una aplicación $D_g : L \to L$ definida mediante $D_g(X) = gXg^{-1}$, con $X \in L$. Al conjunto de operadores D_g se le denomina grupo o representación adjunta de G y lo denotaremos por G_a. Frecuentemente se denota D_g por $\mathrm{Ad}\,g$

Debe comprobarse que $\mathrm{Ad}\,g$ es en efecto una representación de G en $\mathrm{GL}(L)$: si X es de L, $\exp(X) \in G$ y $g\exp(X)g^{-1} = \exp(gXg^{-1}) \in G$ por tanto $D_g(X)$ también es de L. Además es un homomorfismo

$$D_{g_1g_2}(X) = g_1g_2Xg_2^{-1}g_1^{-1} = D_{g_1}D_{g_2}(X)\,. \qquad \diamondsuit \tag{11.21}$$

Teorema. El álgebra de Lie del grupo adjunto G_a es L_a, la representación adjunta de L.

En efecto, sean $X, Y \in L$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}\,e^{tX}(Y) &= \frac{d}{dt}e^{tX}Ye^{-tX} = Xe^{tX}Ye^{-tX} - e^{tX}Ye^{-tX}X = [X, e^{tX}Ye^{-tX}] \\ &= \mathrm{Ad}\,X\,\mathrm{Ad}\,e^{tX}(Y). \end{aligned} \tag{11.22}$$

Integrando con la condición de contorno $\mathrm{Ad}\,e = E$, se deduce

$$\mathrm{Ad}\exp(X) = \exp(\mathrm{Ad}\,X). \tag{11.23}$$

Esto demuestra que los operadores $\mathrm{Ad}\,X$ forman el álgebra de Lie del grupo adjunto. Esta fórmula puede comprobarse mediante desarrollo en serie:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{Ad}\,X)(Y) &= (1 + D_X + \frac{1}{2}D_X^2 + \cdots)(Y) = Y + [X,Y] + \frac{1}{2}[X,[X,Y]] + \cdots \\ \mathrm{Ad}\exp(X)(Y) &= e^XYe^{-X} = (1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots)Y(1 - X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots) \\ &= Y + XY - YX + \frac{1}{2}(X^2Y - 2XYX + YX^2) + \cdots\,. \qquad \diamondsuit \end{aligned} \tag{11.24}$$

12 Grupos de transformaciones

Una transformación de un conjunto Γ es una aplicación biyectiva de Γ en sí mismo. El conjunto de todas las transformaciones de un conjunto forma un grupo, $\mathrm{Perm}(\Gamma)$. Cualquiera de sus subgrupos se denomina grupo de transformaciones de Γ.

Definición. (Grupo de transformaciones.) Sea Γ un espacio topológico y G un grupo continuo. Se dice que G es un grupo continuo de transformaciones (por la izquierda) sobre Γ si

1) Existe un homomorfismo T de G en $\mathrm{Perm}(\Gamma)$, es decir, T_g es una transformación de Γ y $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$. También se usa la notación $T_gx = gx$, $x \in \Gamma$, entonces $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ así como la notación $T_gx = x^g$.

2) La aplicación $\sigma : G \times \Gamma \to \Gamma$ definida por $\sigma(g,x) = gx$ es continua. $\diamondsuit$

Un grupo de transformaciones define una representación no lineal T de G sobre Γ y viceversa una representación no lineal continua define un grupo de transformaciones. Es inmediato que T_g es un homeomorfismo de Γ en Γ ya que es una aplicación continua y su inverso $T_{g^{-1}}$ también. El conjunto $G^* = T(G) = \{T_g,\ g \in G\}$ forma un grupo (por ser imagen de un homomorfismo) al que también nos referimos como grupo de transformaciones.

Ejemplo. Si Γ es precisamente G podemos elegir $T = T^L$ de modo que gx es el producto en G. Por tanto podemos considerar todo grupo continuo como un grupo de transformaciones.

Se dice que G actúa *transitivamente* en Γ si $\forall x,y \in \Gamma$ $gx = y$ para algún $g \in G$. G actúa *libremente* en Γ si T_g no tiene puntos fijos a menos que g sea el neutro, es decir, $\forall x \in \Gamma$ y $\forall g \neq e$ en Γ, $gx \neq x$. G actúa *efectivamente* en Γ si T es una representación fiel, es decir, T_g no es la identidad a menos que g sea la identidad.

Ejemplo. Sea Γ el espacio $\mathbb{R}^2$. El grupo $G = (\mathbb{R},+)$ es un grupo de transformaciones en $\mathbb{R}^2$ mediante $T_x(a,b) = (a+x,b)$. La acción es efectiva y libre pero no transitiva. El grupo $G = (\mathbb{R}^3,+)$ y T definida por $T_{(x,y,z)}(a,b) = (a+x,b+y)$. La acción es transitiva pero no es efectiva ni libre.

Es inmediato que cuando G actúa transitivamente sobre un espacio Γ, éste debe ser un espacio topológico homogéneo dado que T_g es un homeomorfismo.

Es a menudo conveniente caracterizar un grupo por su acción sobre un espacio, para ello es necesario que actúe efectivamente ya que en este caso G y G^* son isomorfos, la representación no lineal es fiel y determina unívocamente la ley de multiplicación del grupo.

Ejemplo. (Grupo de Galileo.) El grupo de Galileo en $n+1$ dimensiones espacio-temporales está formado por transformaciones $\mathrm{g}(R,v,a,b)$ sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, donde $R \in \mathrm{O}(n)$ (rotación impropia), $v \in \mathbb{R}^n$ (velocidad del boost), $a \in \mathbb{R}^n$ (traslación espacial) y $b \in \mathbb{R}$ (traslación temporal), tales que para un punto del espacio-tiempo $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$x^{\mathrm{g}} = Rx + vt + a\,, \qquad t^{\mathrm{g}} = t + b\,. \tag{12.1}$$

Estas transformaciones forman grupo ya que su inverso existe y es del mismo tipo y lo mismo para la composición $g_1g_2 = g_{12}$:

$$((x,t)^{g_2})^{g_1} = (R_2x + v_2t + a_2, t + b_2)^{g_1} = (R_1(R_2x + v_2t + a_2) + v_1(t + b_2) + a_1, t + b_2 + b_1)\,, \tag{12.2}$$

de donde

$$R_{12} = R_1R_2\,, \quad v_{12} = v_1 + R_1v_2\,, \quad a_{12} = a_1 + R_1a_2 + v_1b_2\,, \quad b_{12} = b_1 + b_2\,. \tag{12.3}$$

Alternativamente, se puede considerar el grupo de Galileo como un grupo abstracto formado por elementos (R,v,a,b) con la ley de multiplicación anterior y las transformaciones como una acción efectiva sobre $\mathbb{R}^{n+1}$: si $\mathrm{g}(R,v,a,b)(x,t)=(x,t)$ para todo (x,t) necesariamente $R=E$, $v=a=b=0$ es la única solución y $\mathrm{g}(E,0,0,0)=e$. Es inmediato que las rotaciones, los boosts, las traslaciones espaciales y las temporales forman subgrupos y que

$$\mathrm{g}(R,v,a,b)=\mathrm{g}(E,0,0,b)\mathrm{g}(E,v,0,0)\mathrm{g}(E,0,a,0)\mathrm{g}(R,0,0,0)\,. \tag{12.4}$$

Consideremos el caso $1+1$-dimensional (en el que $R=\pm 1$) y en particular la componente conexa con la identidad. En este caso el grupo de Galileo tiene 3 parámetros: $\mathrm{g}(v,a,b):=\mathrm{g}(x)$. Calculemos las coordenadas canónicas $\hat{\mathrm{g}}(\hat{v},\hat{a},\hat{b}):=\hat{\mathrm{g}}(\hat{x})$ que coinciden infinitesimalmente con (v,a,b), es decir, $x=x(\hat{x})$, $\mathrm{g}(x)=\hat{\mathrm{g}}(\hat{x})$ y $dx=d\hat{x}$ en 0 para $d\hat{x}$ infinitesimal. Consideremos el subgrupo uniparamétrico $x(t)=x(t\hat{x})$:

$$\mathrm{g}(x(t+dt))=\hat{\mathrm{g}}((t+dt)\hat{x})=\hat{\mathrm{g}}(t\hat{x})\hat{\mathrm{g}}(dt\hat{x})=\mathrm{g}(x(t))\mathrm{g}(dt\hat{x})\,. \tag{12.5}$$

Usando la ley de composición $x^i(t+dt)=f^i(x(t),\hat{x}dt)=x^i(t)+\partial_{y^j}f^i(x,0)\hat{x}^j dt$ se llega a

$$\frac{dx^i(t)}{dt}=\hat{x}^j\frac{\partial f^i(x(t),y)}{\partial y^j}\,,\quad x^i(0)=0\,. \tag{12.6}$$

En el caso del grupo de Galileo se tiene

$$\frac{dv(t)}{dt}=\hat{v}\,,\quad \frac{db(t)}{dt}=\hat{b}\,,\quad \frac{da(t)}{dt}=\hat{a}+v(t)\hat{b}\,. \tag{12.7}$$

Imponiendo la condición de contorno $x(0)=0$ y tomando $t=1$, resulta finalmente

$$v=\hat{v}\,,\quad b=\hat{b}\,,\quad a=\hat{a}+\frac{1}{2}\hat{b}\hat{v}\,. \tag{12.8}$$

Un método alternativo es el siguiente. A partir de la ley de multiplicación es inmediato que las únicas constantes de estructura no nulas son $c^a_{vb}=-c^a_{bv}=1$. Denotando los generadores por $P=X_a$, $K=X_v$ y $H=X_b$, el álgebra de Lie es

$$[K,P]=0\,,\quad [H,P]=0\,,\quad [K,H]=P\,. \tag{12.9}$$

Entonces $\hat{\mathrm{g}}(\hat{x})=\exp(\hat{v}K+\hat{a}P+\hat{b}H)$. Por otro lado es inmediato que boosts, traslaciones espaciales y traslaciones temporales por separado forman subgrupos uniparamétricos con parámetros v, a y b respectivamente

$$\mathrm{g}(v,a,b)=\mathrm{g}(0,0,b)\mathrm{g}(v,0,0)\mathrm{g}(0,a,0)=\exp(bH)\exp(vK)\exp(aP)\,. \tag{12.10}$$

Usando el álgebra, la fórmula de Campbell-Hausdorff y el hecho de que el álgebra es nilpotente, $[L,[L,L]]=0$, se tiene

$$\begin{aligned}\exp(\hat{v}K+\hat{a}P+\hat{b}H)&=\exp(bH)\exp(vK)\exp(aP)=\exp(bH)\exp(vK+aP)\\&=\exp(bH+vK+aP-\frac{1}{2}vbP),\end{aligned} \tag{12.11}$$

que coincide con el resultado anterior para las coordenadas canónicas. $\diamondsuit$

Definición. (Difeomorfismo.) Sean M y N dos variedades diferenciables. Un difeomorfismo $f: M \to N$ es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son diferenciables.

Dos variedades difeomorfas son completamente equivalentes como variedades diferenciables. El conjunto de difeomorfismos de M en M forma un grupo, $\mathrm{Dif}(M)$. Este grupo no es de Lie ya que es de dimensión infinita.

Consideramos ahora un grupo de Lie G de dimensión n que actúa sobre una variedad diferenciable M de dimensión m. Imponemos además que T sea una una aplicación diferenciable de $G \times M$ en M, por tanto G^* es un grupo de difeomorfismos de M. La acción está determinada por la función diferenciable $T_g x = F(x,a)$ donde x^μ, $\mu = 1,\ldots,m$ son las coordenadas del punto x de M y a^i, $i = 1,\ldots,n$ las coordenadas del elemento g de G. (Obviamente en general hay que usar varias cartas locales para cubrir M y G.) La condición de homomorfismo implica

$$F(F(x,b),a) = F(x, f(a,b)), \quad F(x,0) = x, \tag{12.12}$$

donde f es la ley de composición del grupo.

Definición. (Representación lineal asociada.) El grupo de difeomorfismos de M admite una representación lineal sobre el espacio $C^\infty(M)$ de funciones diferenciables complejas en M. Sea g^* un difeomorfismo y sea ψ una función diferenciable, entonces se define $\hat{g}^*\psi$ mediante $(\hat{g}^*\psi)(g^*x) = \psi(x)$. Es inmediato que $\hat{g}_1^*\hat{g}_2^* = \widehat{g_1^* g_2^*}$.

Teorema. La transformación $\hat{g}^*$ sobre funciones en M es una representación fiel de la transformación g^* sobre puntos de M.

En efecto, si $\hat{g}^*$ es la identidad, se sigue que para cualesquiera ψ y x se cumple $\psi(x) = (\hat{g^*}\psi)(g^*x) = \psi(g^*x)$. Tomando en particular $\psi(x) = x^\mu$, $\mu = 1,\ldots,m$, se deduce $x = g^*x$ y g^* es la identidad, luego $g^* \mapsto \hat{g}^*$ es fiel. $\diamondsuit$

La representación no lineal T de G sobre M induce una representación lineal $\hat{T}$ de G sobre $C^\infty(M)$ mediante $g \mapsto T_g = g^* \mapsto \hat{T}_g = \hat{g}^*$. Denotamos el grupo formado por los operadores $\hat{T}_g$ por G^{**}. Este grupo es isomorfo a G^*. A su vez éste es isomorfo a G si la acción es efectiva.

Definición. (Generadores infinitesimales.) Se denominan generadores infinitesimales del grupo de transformaciones a los asociados al grupo G^{**}, en el mismo sentido que para grupos de matrices, es decir,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial a^i}\hat{T}_{\mathrm{g}(a)}\Big|_0. \tag{12.13}$$

Equivalentemente,

$$\hat{T}_g = 1 + a^i X_i + O(a^2). \tag{12.14}$$

Análogamente a lo que ocurre para grupos de matrices, el álgebra de Lie de G^{**} es isomorfa un álgebra lineal formada por sus generadores infinitesimales, que son operadores lineales sobre el mismo espacio que el grupo, $C^\infty(M)$. Sin embargo hay una diferencia con respecto del caso de grupos de matrices, ya que los operadores en G^{**} no son de dimensión finita y algunas propiedades que eran válidas para matrices sólo lo son ahora en un dominio restringido de funciones suficientemente regulares.

Para obtener la expresión explícita de X_i, consideramos una transformación infinitesimal g^*, es decir,

$$g^*x = x + \delta x = x + s(x)\delta t\,, \tag{12.15}$$

donde $s(x)$ es una función diferenciable y trabajamos en primer orden en δt. A este orden

$$(g^*)^{-1}x = x - \delta x\,, \tag{12.16}$$

ya que $g^*(x-\delta x) = x - \delta x - s(x-\delta x)\delta t = x + O(\delta t^2)$. La acción de g^* sobre una función es

$$(\hat{g}^*\psi)(x) = \psi((g^*)^{-1}x) = \psi(x-\delta x) = \psi(x) - \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\,, \tag{12.17}$$

es decir,

$$\hat{g}^* = 1 - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \tag{12.18}$$

y el generador asociado a la transformación infinitesimal δx^μ es

$$\delta X = -\delta x^\mu \partial_\mu = -\delta t s(x)\partial_\mu\,. \tag{12.19}$$

Cuando el difeomorfismo infinitesimal g^* corresponde a T_g, siendo g un elemento infinitesimal del grupo con coordenadas δa^i, tenemos

$$x^\mu + \delta x^\mu = (g^*x)^\mu = (T_g x)^\mu = F^\mu(x,\delta a) = x^\mu + \delta a^i \frac{\partial F^\mu(x,a)}{\partial a^i}\Big|_{a=0}. \tag{12.20}$$

De aquí, usando $\delta X = \delta a^i X_i = -\delta x^\mu \partial_\mu$,

$$X_i = -F_i^\mu(x)\partial_\mu\,, \quad F_i^\mu(x) := \partial_i F^\mu(x,0)\,. \tag{12.21}$$

Puesto que los operadores diferenciales X_i forman una representación del álgebra del grupo, cumplen

$$[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k\,, \tag{12.22}$$

siendo $c_{ij}{}^k$ las constantes de estructura de G en las coordenadas a^i. Si la representación es fiel (es decir, G actúa efectivamente), los X_i serán linealmente independientes. A menudo, para un grupo de transformaciones efectivo el modo más conveniente de obtener su álgebra de Lie es mediante sus generadores infinitesimales, ya que este procedimiento no requiere construir previamente la ley de composición.

Ejemplo. Sea G el grupo de Galileo en $1+1$ dimensiones definido como un grupo de transformaciones sobre $\mathbb{R}^2$ mediante $(x^g, t^g) = (x + vt + a, t + b)$. Para δv, δa y δb infinitesimales se tiene $\delta x = t\delta v + \delta a$ y $\delta t = \delta b$. El operador infinitesimal correspondiente es $\delta X = (t\delta v + \delta a)X_x + \delta b X_t$, es decir

$$P = X_a = -\partial_x\,, \quad H = X_b = -\partial_t\,, \quad K = X_v = -t\partial_x\,. \tag{12.23}$$

Es inmediato que forman la misma álgebra que la obtenida anteriormente $[K,P] = [H,P] = 0\,,\ [K,H] = P$. $\diamondsuit$

Las relaciones de conmutación garantizan que $\hat{T}_g$ es localmente una representación. Cuando $n > 1$, estas condiciones son no triviales para las funciones $F_i^\mu(x)$, a saber

$$F_i^\mu(x)\partial_\mu F_j^\nu(x) - F_j^\mu(x)\partial_\mu F_i^\nu(x) = c_{ij}{}^k F_k^\nu(x)\,. \tag{12.24}$$

En un entorno de la identidad del grupo, y en un dominio apropiado de funciones, que son las funciones analíticas,

$$\hat{T}_g = \exp(\hat{a}^i X_i)\,, \tag{12.25}$$

donde $\hat{a}$ representa el sistema de coordenadas canónicas con los mismos generadores infinitesimales que a.

Ejemplo. Sea M la recta real y G el grupo $(\mathbb{R},+)$. En este caso, $m = n = 1$ y se puede usar la coordenada canónica natural para M y para G: $T_a x = x + a$ y $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x-a)$. Además $X_1 = -\partial_x$ es el generador infinitesimal asociado a la coordenada a. De acuerdo con la fórmula general $\hat{T}_a = \exp(-a\partial_x)$ y en efecto

$$e^{-a\partial_x}\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!}\psi^{(k)}(x) \tag{12.26}$$

es el desarrollo en serie de Taylor de $\psi(x-a)$. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Grupo de Poincaré.)

El grupo de Poincaré es un grupo de transformaciones definido sobre $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ dotado con la métrica de Minkowsky. Denotamos este espacio métrico por M^4. Como coordenadas tomamos las componentes del vector en una base en la que la métrica tome la forma canónica $g = \eta_{1,3} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Las transformaciones son aquellas que dejan invariante el intervalo $(x-y)^2$, $x, y \in M^4$, es decir, de la forma $g : M^4 \to M^4$ con $gx = \Lambda x + a$, o en componentes, $x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$, donde $\mu, \nu = 0,1,2,3$, $a \in \mathbb{R}^4$ y $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$. La acción es efectiva y cada elemento del grupo queda caracterizado por el par (Λ, a). La ley de multiplicación es $(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1\Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)$, de donde es inmediato que el grupo de Poincaré es el producto semidirecto $T^4 \otimes_s \mathrm{O}(1,3)$, donde T^4 es el grupo de traslaciones $\{(E,a)\}$ (subgrupo invariante) y $\mathrm{O}(1,3)$ es el grupo de Lorentz $\{(\Lambda,0)\}$ formado por las transformaciones lineales que dejan invariante la métrica: $\Lambda^T g\Lambda = g$ (en componentes $g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu$).

Pasemos a considerar los generadores infinitesimales. Sea Λ una transformación de Lorentz infinitesimal: $\Lambda = E + \delta\omega$, con $\delta\omega^\mu{}_\nu$ infinitesimal. Para que Λ sea de Lorentz debe cumplirse $0 = \delta\omega^T g + g\delta\omega$, o en componentes el tensor $\delta\omega_{\mu\nu}$ debe ser antisimétrico (los índices se suben y bajan con la métrica y su inversa $g^{\mu\nu}$, así $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\delta\omega^{\alpha}_{\nu}$). De donde se deduce que hay 6 parámetros independientes y el grupo de Lorentz es un grupo de Lie de dimensión 6, correspondientes a rotaciones (3 parámetros) y boosts (3 parámetros). Por otro lado, una traslación infinitesimal está caracterizada por los 4 parámetros infinitesimales δa^{μ}. Por tanto el grupo de traslaciones tiene dimensión 4. En total el grupo de Poincaré tiene dimensión 10. La transformación infinitesimal correspondiente es $\delta x^{\mu} = \delta\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + \delta a^{\mu}$. De aquí

$$\delta X = \delta a^{\mu}\hat{P}_{\mu} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu} \tag{12.27}$$

con

$$\hat{P}^{\mu} = -\partial^{\mu}\,, \quad \hat{J}^{\mu\nu} = x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu} = -x^{\mu}\hat{P}^{\nu} + x^{\nu}\hat{P}^{\mu}\,. \tag{12.28}$$

Las relaciones de conmutación se calculan fácilmente usando $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$ y $[x^{\mu},\hat{P}^{\nu}] = g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} [\hat{P}^{\mu},\hat{P}^{\nu}] &= 0 \\ [\hat{J}^{\mu\nu},\hat{P}^{\alpha}] &= -g^{\mu\alpha}\hat{P}^{\nu} + g^{\nu\alpha}\hat{P}^{\mu} \\ [\hat{J}^{\mu\nu},\hat{J}^{\alpha\beta}] &= -g^{\mu\alpha}\hat{J}^{\nu\beta} + g^{\nu\alpha}\hat{J}^{\mu\beta} - g^{\mu\beta}\hat{J}^{\alpha\nu} + g^{\nu\beta}\hat{J}^{\alpha\mu}\,. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Es importante notar que el álgebra hallada sólo depende del grupo de Poincaré, no de la representación particular usada. Exactamente las mismas fórmulas sirven para cualquier otro grupo del tipo $\mathrm{T}^{n}\otimes_{s} SO(p,q)$ usando η_{pq} como métrica.

Los generadores $\hat{P}^{\mu}$ forman un ideal, correspondiente al subgrupo invariante de las traslaciones. Los $\hat{J}^{\mu\nu}$ forman una subálgebra correspondiente al subgrupo de las transformaciones de Lorentz. Una transformación finita corresponde a

$$U(\Lambda,a) = \exp(\hat{a}^{\mu}\hat{P}_{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\omega}^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu}) = \exp(a^{\mu}\hat{P}_{\mu})\exp(\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu}) \tag{12.30}$$

con $\hat{a}$ y $\hat{\omega}$ finitos correspondientes a las coordenadas canónicas en el grupo de Poincaré completo y a, ω canónicas en el subgrupo de traslaciones y de Lorentz, respectivamente. Por construcción

$$(U(\Lambda,a)\psi)(x) = \psi((\Lambda,a)^{-1}x) = \psi(\Lambda^{-1}(x-a))\,. \tag{12.31}$$

Cuando la representación es unitaria se suelen introducir unos generadores hermíticos mediante $P^{\mu} = -i\hat{P}^{\mu}$ y $J^{\mu\nu} = i\hat{J}^{\mu\nu}$. Con éstos las relaciones de conmutación toman la forma

$$\begin{aligned} [P^{\mu},P^{\nu}] &= 0 \\ [J^{\mu\nu},P^{\alpha}] &= -ig^{\mu\alpha}P^{\nu} + ig^{\nu\alpha}P^{\mu} \\ [J^{\mu\nu},J^{\alpha\beta}] &= -ig^{\mu\alpha}J^{\nu\beta} + ig^{\nu\alpha}J^{\mu\beta} - ig^{\mu\beta}J^{\alpha\nu} + ig^{\nu\beta}J^{\alpha\mu} \end{aligned} \tag{12.32}$$

y el operador de transformaciones finitas es $U(\Lambda,a) = \exp(ia^{\mu}P_{\mu})\exp(-\frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu})$. Puede comprobarse que los operadores $M^{2} = P^{\mu}P_{\mu}$ y $W^{2} = W^{\mu}W_{\mu}$, donde $W^{\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_{\nu}J_{\alpha\beta}$ es el operador de Pauli-Lubanski, son operadores de Casimir del álgebra (conmutan con todos los generadores) y por tanto son invariantes Poincaré. Corresponden a la invariancia de la masa y del espín bajo el grupo de Poincaré, respectivamente. Los casimires del álgebra de Lorentz son $\frac{1}{2}J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ y $\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}$.

Los operadores hamiltoniano, momento lineal, momento angular y generador de los boosts corresponden a

$$H = P^0\,, \quad (\vec{P})_i = P^i\,, \quad (\vec{J})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{jk}\,, \quad (\vec{K})_i = J^{0i}\,. \tag{12.33}$$

El álgebra de Lie se escribe

$$\begin{aligned}
&[H,P_i] = 0\,, \quad [P_i,P_j] = 0, \\
&[H,J_i] = 0\,, \quad [H,K_i] = iP_i, \quad [J_i,P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k\,, \quad [K_i,P_j] = -i\delta_{ij}H, \\
&[J_i,J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i,K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i,K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k,
\end{aligned} \tag{12.34}$$

donde P_i se refiere al vector $\vec{P}$. Se deduce que $\vec{P}$, $\vec{J}$ y $\vec{K}$ son operadores vectoriales y que las rotaciones definen un subgrupo pero los boosts no.

Definiendo además

$$(\vec{a})_i = a^i\,, \quad (\vec{\theta})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega^{jk}\,, \quad (\vec{\chi})_i = -\omega^{0i}\,, \tag{12.35}$$

el operador $U(\Lambda,a)$ toma la forma

$$U(\Lambda,a) = \exp(ia_0H - i\vec{a}\vec{P})\exp(-i\vec{\theta}\vec{J} - i\vec{\chi}\vec{K})\,. \tag{12.36}$$

En $C^\infty(M^4)$ se puede definir un producto escalar mediante

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle = \int \psi_1^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}^4x\,, \tag{12.37}$$

y considerar el espacio de funciones normalizables $L^2(\mathbb{R}^4)$. La representación que se ha construido más arriba es unitaria en $L^2(\mathbb{R}^4)$ ya que $\det\Lambda = \pm 1$. Correspondientemente los generadores infinitesimales $P^\mu = i\partial^\mu$ y $J^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu$ son hermíticos como se comprueba inmediatamente. En esta representación se tiene

$$\begin{aligned}
&\vec{P} = -i\nabla\,, \quad H = i\partial_t \\
&\vec{J} = \vec{r}\times\vec{P}, \quad \vec{K} = t\vec{P} - \vec{r}H,
\end{aligned} \tag{12.38}$$

donde $(\vec{r})_i = x^i$. Por ejemplo, $(\vec{P})_i = i\partial^i = -i\partial_i = (-i\nabla)_i$. El momento angular sólo tiene parte orbital ya que las funciones $\psi(\vec{r},t)$ son escalares bajo rotaciones y la representación corresponde por tanto a espín 0.

Nótese que la representación sobre $L^2(\mathbb{R}^4)$ no coincide con la representación de Schrödinger, sobre funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$. En $L^2(\mathbb{R}^3)$, por ejemplo, $i\partial_t$ no está definido como un operador lineal y por tanto H debe realizarse de otra forma. Concretamente, una representación en $L^2(\mathbb{R}^3)$ es la siguiente

$$\vec{P} = -i\nabla, \qquad H = \sqrt{M^2 + \vec{P}^{\,2}} \tag{12.39}$$

$$\vec{J} = \vec{r}\times\vec{P}, \qquad \vec{K} = -\frac{1}{2}(\vec{r}H + H\vec{r})\,. \tag{12.40}$$

Aquí M^2 es una constante (el cuadrado de la masa) que caracteriza a la representación y que coincide con el operador de Casimir M^2. El otro casimir W^2 se anula correspondiendo a espín 0. Es inmediato que los operadores son hermíticos. Para comprobar que cumplen el álgebra del grupo basta notar que $\vec{r} = +i\nabla_{\vec{P}}$ y por tanto $[\vec{r}, H] = i\vec{P}/H$ (nótese que $\vec{r}$ y H conmutaban en la representación en $L^2(\mathbb{R}^4)$). En particular $\vec{K} = -\vec{r}H + \frac{1}{2}i\vec{P}/H$. Las relaciones de conmutación se comprueban inmediatamente.

Es interesante notar que en esta representación cada generador define una constante del movimiento (teorema de Noether). Una constante del movimiento es todo operador A que cumpla

$$\frac{dA}{dt} := \frac{\partial A}{\partial t} + i[H, A] = 0\,. \tag{12.41}$$

Como los generadores no dependen del tiempo explícitamente (sólo dinámicamente), usando las relaciones de conmutación se deduce que H, $\vec{P}$, $\vec{J}$ y $\vec{K} + t\vec{P}$ son constantes del movimiento. $\diamondsuit$

13 Medida invariante. Grupos compactos

Definición. (Medida positiva.) Sea X un espacio topológico y $C_0(X)$, las funciones continuas de soporte compacto definidas en X. Una medida (en el sentido de Radon) es una forma lineal continua μ sobre $C_0(X)$. La medida es positiva si $\mu(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$.

Cuando X es localmente compacto y unión numerable de compactos, la medida positiva en sentido de Radon define una medida positiva de Borel, es decir sobre subconjuntos de X, $\mu(A) \geq 0$, $A \subseteq X$, de modo que

$$\mu(f) = \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{13.1}$$

Definición. (Medida invariante.) Sea G un grupo continuo. Una medida μ sobre G es invariante por la izquierda si $\mu(T_g^L f) = \mu(f)$, donde $T_g^L f(x) = f(g^{-1}x)$, $x, g \in G$. Una medida positiva invariante por la izquierda se denomina medida de Haar por la izquierda. Ídem por la derecha, con $T_g^R f(x) = f(xg)$.

Teorema. (de Haar.) Todo grupo continuo localmente compacto admite una medida de Haar por la izquierda no nula que es única salvo normalización, es decir, si μ_1 y μ_2 son dos tales medidas, $\mu_2 = c\mu_1$ para cierto $c > 0$. Ídem por la derecha.

La medida invariante por la izquierda μ está caracterizada por $\mu(gA) = \mu(A)$ o equivalentemente por $\mathrm{d}\mu(gx) = \mathrm{d}\mu(x)$, para todo $A \subseteq G$ y $g, x \in G$. Análogamente si es invariante por la derecha, $\mathrm{d}\mu(xg) = \mathrm{d}\mu(x)$. Una medida de Lebesgue en G que sea invariante coincide con la medida de Haar, por unicidad.

Ejemplo. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es la medida de Haar correspondiente al grupo de traslaciones $(\mathbb{R}^n, +)$.

Ejemplo. Si G es un grupo finito, la medida usual $\mu(f) = \sum_{g \in G} f(g)$, es la medida invariante, por el lema de reordenación.

En estos dos ejemplos las medidas son a la vez invariantes por la derecha y por la izquierda, pero esto no es cierto para grupos cualesquiera.

Definición. (Función modular.) Sea μ una medida de Haar por la izquierda no nula de G. Podemos definir una nueva medida μ_h mediante $\mu_h(f) := \mu(T^R_h f)$, para cada elemento h de G. Esta medida también es invariante por la izquierda. En efecto, teniendo en cuenta que T^L y T^R conmutan,

$$\mu_h(T^L_g f) = \mu(T^R_h T^L_g f) = \mu(T^L_g T^R_h f) = \mu(T^R_h f) = \mu_h(f)\,. \tag{13.2}$$

Dado que la medida de Haar es única salvo normalización se deduce que μ_h es proporcional a μ y existe una función positiva y continua, $\Delta(g)$, definida por $\mu(T^R_g f) = \Delta(g)\mu(f)$, denominada función modular de G. Esta función sólo depende del grupo ya que es independiente de f y de la normalización de μ. $\diamondsuit$

Nótese que de $\mu(T^R_g f) = \int_G f(xg)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(xg^{-1})$ se deduce (en integrales sobre x con g fijo)

$$\mathrm{d}\mu(xg^{-1}) = \Delta(g)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{13.3}$$

Teorema. La función modular es una representación del grupo.

En efecto, ya que los números reales positivos forman un grupo multiplicativo, basta probar que $\Delta(g_1)\Delta(g_2) = \Delta(g_1 g_2)$.

$$\Delta(g_1g_2)\mu(f) = \mu(T^R_{g_1g_2}f) = \mu(T^R_{g_1}T^R_{g_2}f) = \Delta(g_1)\mu(T^R_{g_2}f) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)\mu(f)\,. \quad \diamondsuit \tag{13.4}$$

Teorema. Las medidas invariantes por la derecha y por la izquierda, μ_R y μ_L están relacionadas por $\mathrm{d}\mu_R(x) = \Delta(x)\mathrm{d}\mu_L(x)$, salvo normalización.

En efecto, sea μ_L la medida invariante por la izquierda. Basta probar que la medida $\Delta(x)\mathrm{d}\mu_L(x)$ es invariante por la derecha

$$\Delta(xg^{-1})\mathrm{d}\mu_L(xg^{-1}) = \Delta(xg^{-1})\Delta(g)\mathrm{d}\mu_L(x) = \Delta(x)\mathrm{d}\mu_L(x)\,. \qquad \diamondsuit \tag{13.5}$$

Definición. (Grupo unimodular.) Cuando las medidas de Haar por la derecha y por la izquierda coinciden, se dice que el grupo es unimodular y la medida se denomina medida invariante del grupo. El grupo es unimodular si y sólo si $\Delta(g) = 1$, para todo g.

Teorema. Si G es un grupo unimodular y μ es su medida invariante, se cumple $\mu(f) = \mu(\hat{f})$, donde $\hat{f}(x) = f(x^{-1})$.

En efecto, sea $\hat{\mu}$ definida por $\hat{\mu}(f) = \mu(\hat{f})$. Esta medida también es una medida invariante, ya que

$$\hat{\mu}(T^L_g f) = \mu((T^L_g f)\hat{}\,) = \mu(T^R_g \hat{f}) = \mu(\hat{f}) = \hat{\mu}(f)\,. \tag{13.6}$$

Por tanto $\hat{\mu} = c\mu$, $c > 0$. Tomando una función tal que $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ (por ejemplo, $f(x) + f(x^{-1})$), se deduce que $c = 1$. $\diamondsuit$

Se deduce que $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}\mu(x^{-1})$ para grupos unimodulares. En el caso general puede demostrarse

$$\int_G f(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \Delta^{-1}(x) f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{13.7}$$

Teorema. Los grupos compactos y los grupos abelianos son unimodulares.

En efecto, si G es abeliano $T_g^L = T_{g^{-1}}^R$ luego una medida invariante por la izquierda también lo es por la derecha. Si G es compacto $f(x) = 1$ es una función de $C_0(G)$ y por tanto $\mu(1) < \infty$. Entonces, $\Delta(g)\mu(1) = \mu(T_g^R 1) = \mu(1)$ y $\Delta(g) = 1$. $\diamondsuit$

Sea G un grupo de Lie n-dimensional. Veamos cómo calcular su medida invariante. Usando un sistema de coordenadas analíticas x, una medida puede escribirse en la forma

$$\mu(f) = \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g) = \int_D f(\mathrm{g}(x))\sigma(x)\mathrm{d}^n x\,, \tag{13.8}$$

donde el D se refiere al recorrido de las coordenadas. En general habrá que recubrir G con varias cartas locales y sumar el resultado de las integrales en cada carta. Para una medida de Radon cualquiera σ es una distribución, que será positiva si μ es positiva. Si se trata de una medida invariante, $\sigma(x)$ es una función analítica que representa el peso del elemento de volumen $d^n x$. Para que la medida sea invariante por la izquierda debe cumplir $\mathrm{d}\mu(gh) = \mathrm{d}\mu(h)$ al integrar sobre h y con g fijo. Sean x las coordenadas de g e y las de h, entonces

$$\sigma(y)\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}\mu(h) = \mathrm{d}\mu(gh) = \sigma(f(x,y))d^n(f(x,y)) = \sigma(f(x,y))\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| d^n y\,, \tag{13.9}$$

donde $f(x,y)$ es la ley de composición del grupo y $|\frac{\partial f}{\partial y}|$ es el jacobiano. Procediendo análogamente para la invariancia por la derecha, se obtiene que si σ_L y σ_R son invariantes por la izquierda y por derecha respectivamente, deben cumplir

$$\sigma_L(y) = \sigma_L(f(x,y))\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|, \qquad \sigma_R(y) = \sigma_R(f(y,x))\left|\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\right|. \tag{13.10}$$

Tomando $y = 0$, correspondiente a $h = e$, se deduce la forma de las medidas invariantes, a saber

$$\sigma_L(x) = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^{-1}_{y=0}, \qquad \sigma_R(x) = \left|\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\right|^{-1}_{y=0}, \tag{13.11}$$

con normalización $\sigma_R(0) = \sigma_L(0) = 1$. Se puede comprobar a posteriori que estas funciones son invariantes lo cual demuestra el teorema de Haar en este caso. La medida en una región fuera del dominio de la carta local se puede calcular trasladando primero la región (por la derecha o por la izquierda) dentro de la carta. La función modular $\Delta(x)$ es $\sigma_R(x)/\sigma_L(x)$.

Ejemplo. Para el grupo $\mathrm{U}(1)$, usamos coordenadas $\omega = \mathrm{g}(x) = e^{ix}$, $|x| < \pi$. En estas coordenadas, la ley de composición es $f(x,y) = x+y$ y por tanto $\sigma_L(x) = \sigma_R(x) = 1$, y la medida invariante es $\mathrm{d}x = -i\omega^{-1}\mathrm{d}\omega$. La medida normalizada es

$$\mu(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})\mathrm{d}x = \oint f(\omega)\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi i\omega}\,, \tag{13.12}$$

donde la integral de contorno es sobre una circunferencia positiva de radio 1.

Ejemplo. Calculemos las medidas invariantes del grupo $G = \left\{\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$. Tomamos a y b como coordenadas. Sea $g_1 = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$ y $g_2 = \begin{pmatrix} e^{a_2} & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $g_1 g_2 = \begin{pmatrix} e^{a_1+a_2} & 0 \\ b_1 e^{a_2} + b_2 & 1 \end{pmatrix}$, y la ley de composición es $f^a = a_1 + a_2$, $f^b = b_1 e^{a_2} + b_2$.

$$\sigma_L(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}^{-1} = 1\,, \quad \sigma_R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^a \end{vmatrix}^{-1} = e^{-a}\,, \tag{13.13}$$

de donde $\mathrm{d}\mu_L(a,b) = \mathrm{d}a\mathrm{d}b$, $\mathrm{d}\mu_R(a,b) = e^{-a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ y $\Delta(a,b) = e^{-a}$. Nótese que este grupo no es unimodular. $\diamondsuit$

Ejemplo. (Medida invariante de $\mathrm{SU}(2)$.) Como es un grupo compacto es unimodular. La medida se puede obtener usando la ley de composición en coordenadas $A = x_0 - i\vec{x}\vec{\sigma}$, $x_0^2 + \vec{x}^2 = 1$, a saber $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = x_0\vec{y} + y_0\vec{x} + \vec{x}\times\vec{y}$. Otro método especial para este grupo está basado en que su topología es S^3 y la medida invariante no es más que la medida isótropa sobre la esfera. Para ver esto, nótese que dicha medida isótropa es invariante bajo rotaciones en $\mathbb{R}^4$, es decir, bajo $\mathrm{SO}(4)$, por tanto basta probar que una traslación por la izquierda en $\mathrm{SU}(2)$ define una rotación de $\mathbb{R}^4$ (pero no al revés ya que la dimensión de $\mathrm{SO}(4)$ es 6 y la de $\mathrm{SU}(2)$ es 3). Sean a,b dos puntos de $\mathbb{R}^4$, y A y B las dos matrices 2×2 construidas con ellos, entonces

$$\begin{aligned} \det(A-B) &= \begin{vmatrix} (a_0-b_0) - i(a_3-b_3) & -i(a_1-b_1) - (a_2-b_2) \\ -i(a_1-b_1) + (a_2-b_2) & (a_0-b_0) + i(a_3-b_3) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\mu=0}^{3} (a_\mu - b_\mu)^2 = ||a-b||^2. \end{aligned} \tag{13.14}$$

Si A, B son de $\mathrm{SU}(2)$, ($||a|| = ||b|| = 1$), la traslación por la izquierda deja invariante la distancia euclídea, ya que

$$||a^g - b^g||^2 = \det(gA - gB) = \det(g(A-B)) = \det(g)\det(A-B) = ||a-b||^2\,. \tag{13.15}$$

Luego la T^L define una transformación ortogonal, que además es de orientación positiva ya que $\mathrm{SU}(2)$ es conexo, es decir, un elemento de $\mathrm{SO}(4)$. Por unicidad se deduce que la medida invariante de $\mathrm{SU}(2)$ es $\mathrm{d}^3\Omega$, el ángulo sólido sobre la esfera S^3. Una forma práctica de obtenerla es con

$$\mathrm{d}\mu(\mathrm{g}(x)) = \delta(||x||^2 - 1)\mathrm{d}^4 x \tag{13.16}$$

que es manifiestamente invariante bajo O(4). Usando la identidad

$$\delta(f(x)) = \sum_{\{x_0|f(x_0)=0\}} |f'(x_0)|^{-1}\delta(x-x_0), \tag{13.17}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\mathrm{d}\mu(g) &= \int_{\mathbb{R}^4} f(\mathrm{g}(x))\delta(||x||^2-1)\mathrm{d}^4x \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} f(\mathrm{g}(x))\frac{1}{2|x_0|}\left(\delta(x_0-\sqrt{1-\vec{x}^2})+\delta(x_0+\sqrt{1-\vec{x}^2})\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}^3x \\ &= \int_{B^3(0,1)} \left(f(\mathrm{g}(x_0,\vec{x}))+f(\mathrm{g}(-x_0,\vec{x}))\right)\frac{1}{2x_0}\mathrm{d}^3x,\end{aligned} \tag{13.18}$$

donde $B^3(0,1)$ es la bola centrada en 0 de radio unidad en $\mathbb{R}^3$, $\{|\vec{x}|\le 1\}$ y $x_0 = +\sqrt{1-\vec{x}^2}$

Si se usa la parametrización $x_0 = \cos(\psi/2)$, $\vec{x} = \mathrm{sen}(\psi/2)\hat{n}$, con $-\pi<\psi<\pi$ y $\hat{n}^2 = 1$, la medida normalizada es

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\mathrm{d}\mu(g) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_{\mathrm{S}^2}\mathrm{d}^2\Omega\,\mathrm{sen}^2(\frac{1}{2}\psi)f(g)\,. \tag{13.19}$$

Finalmente en función de los ángulos de Euler,

$$\mathrm{g}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha\sigma_3/2}e^{-i\beta\sigma_2/2}e^{-i\gamma\sigma_3/2}, \tag{13.20}$$

se tiene

$$\begin{aligned}&x_0 = \cos((\alpha+\gamma)/2)\cos(\beta/2), \\ &\vec{x} = (-\mathrm{sen}((\alpha-\gamma)/2)\,\mathrm{sen}(\beta/2), \cos((\alpha-\gamma)/2)\,\mathrm{sen}(\beta/2), \mathrm{sen}((\alpha+\gamma)/2)\cos(\beta/2)).\end{aligned} \tag{13.21}$$

Calculando el jacobiano de $\vec{x}(\alpha,\beta,\gamma)$ se obtiene la medida normalizada en estas coordenadas

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} f(g)\mathrm{d}\mu(g) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha\int_0^{\pi}\mathrm{d}\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\int_0^{4\pi}\mathrm{d}\gamma\, f(g)\,. \qquad \diamondsuit \tag{13.22}$$

En grupos continuos también pueden definirse métricas invariantes.

Teorema. Todo grupo continuo cuyos abiertos en la identidad admitan una base numerable tiene una distancia invariante por la izquierda cuya topología inducida es precisamente la del grupo. Ídem por la derecha.

Nótese que esta distancia, a diferencia de las medidas invariantes, no es necesariamente única salvo normalización.

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2,+)$ las distancias $d(x,y) = \sqrt{a(x^1-y^1)^2+b(x^2-y^2)^2}$, $a,b>0$ son todas invariantes.

Ejemplo. Si $\mathrm{d}s_1^2$ y $\mathrm{d}s_2^2$ son métricas invariantes para los grupos G_1 y G_2, la métrica $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_1^2 + \mathrm{d}s_2^2$ es invariante para $G = G_1 \otimes G_2$. Análogamente, $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\mu_1 \mathrm{d}\mu_2$ es una medida invariante de G si $\mathrm{d}\mu_1$ y $\mathrm{d}\mu_2$ lo son de G_1 y G_2.

Para un grupo de Lie, nos podemos restringir a distancias asociadas a métricas de Riemann, $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. A su vez, una métrica define una medida mediante $\mathrm{d}\mu(x) = \sqrt{g}\mathrm{d}^n x$ donde g es el determinante de la métrica g_{ij}. Bajo transformaciones generales de coordenadas (diferenciables), $\mathrm{d}s^2$ y $\mathrm{d}\mu(x)$ son escalares, g_{ij} es un tensor y $\sqrt{g}$ es una densidad tensorial. En efecto, sea x' otro sistema de coordenadas,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\mathrm{d}x'^j, \\
&\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = g'_{ij}\mathrm{d}x'^i\mathrm{d}x'^j, \quad g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}g_{k\ell}, \\
&\mathrm{d}\mu = \sqrt{g}\mathrm{d}^n x = \sqrt{g'}\mathrm{d}^n x', \quad \sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{g}.
\end{aligned}
\tag{13.23}
$$

Si $\mathrm{d}s^2$ es invariante bajo una transformación $\mathrm{d}\mu(x)$ también. En efecto, sea F la transformación (activa), $x \mapsto x'$ con $x'^i = F^i(x)$. El intervalo infinitesimal $(x, \mathrm{d}x)$ se mueve a $(x', \mathrm{d}x')$ con $\mathrm{d}x'^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$. Por hipótesis $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$ y por tanto debe cumplirse

$$
g_{ij}(x) = \frac{\partial F^k}{\partial x^i}\frac{\partial F^\ell}{\partial x^j}g_{k\ell}(F(x))\,. \tag{13.24}
$$

De aquí se deduce que la medida es invariante ya que si $\mathrm{d}v$ es la medida del paralelepípedo $(x, \mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n)$, la medida del paralelepípedo trasladado es la misma:

$$
\mathrm{d}v' = \sqrt{g(x')}\mathrm{d}^n x' = \sqrt{g(F(x))}\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\mathrm{d}^n x = \sqrt{g(x)}\mathrm{d}^n x = \mathrm{d}v\,. \tag{13.25}
$$

En particular, si $\mathrm{d}s^2$ es invariante bajo traslaciones por la derecha o por la izquierda, también lo será la medida asociada.

Como la medida invariante sólo depende de la ley de composición nos podemos restringir a grupos de Lie lineales. Sea G un grupo de Lie lineal y sea (A, A') un intervalo infinitesimal, con origen $A = \mathrm{g}(x)$ y extremo $A' = A + \mathrm{d}A = \mathrm{g}(x + \mathrm{d}x)$. Como A y A' están infinitesimalmente próximos, $A^{-1}A'$ es un elemento del grupo en un entorno infinitesimal de la identidad y por tanto es de la forma $\exp(\mathrm{d}L)$ con $\mathrm{d}L$ un elemento infinitesimal del álgebra de Lie L_G. Más explícitamente

$$
A^{-1}A' = A^{-1}(A + \mathrm{d}A) = 1 + A^{-1}\mathrm{d}A = \exp(A^{-1}\mathrm{d}A) = \exp(\mathrm{d}L)\,, \tag{13.26}
$$

y $\mathrm{d}L$ es de L_G ya que $\exp(\mathrm{d}L)$ es de G. Si x^i un sistema de coordenadas en G y X_i es una base cualquiera de L_G (no necesariamente la base asociada al sistema de coordenadas x^i) tendremos

$$
\mathrm{d}L = A^{-1}\mathrm{d}A = A^{-1}\partial_i A\mathrm{d}x^i = (A^{-1}\partial_i A)^j\mathrm{d}x^i X_j := \mathscr{L}^j{}_i\mathrm{d}x^i X_j\,. \tag{13.27}
$$

Una traslación por la izquierda del intervalo consiste en la transformación $(A,A') \mapsto T^L_g(A,A') = (gA, gA')$, es decir, $(A, A\exp(\mathrm{d}L)) \mapsto (gA, gA\exp(\mathrm{d}L))$, por tanto $\mathrm{d}L$ es invariante por la izquierda. Como consecuencia si una métrica es tal que la longitud de un intervalo infinitesimal $(A, A\exp(\mathrm{d}L))$ depende sólo de $\mathrm{d}L$ (y no de A) esta métrica será invariante. Y viceversa, si la métrica es invariante, el intervalo infinitesimal $(A, A\exp(\mathrm{d}L))$ tendrá la misma longitud que su trasladado por la izquierda a la identidad $(1, \exp(\mathrm{d}L))$ y ésta será independiente de A. Se deduce que hay tantas métricas invariantes por la izquierda como productos escalares en L_G.

Las mismas consideraciones se pueden hacer para la invariancia bajo traslaciones por la derecha definiendo $(A,A') = (A, \exp(\mathrm{d}R)A)$ y

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}AA^{-1} = (\partial_i AA^{-1})^j \mathrm{d}x^i X_j := \mathscr{R}^j{}_i \mathrm{d}x^i X_j \,. \tag{13.28}$$

Nótese que bajo traslaciones por ambos lados se tiene $A \mapsto T^L_{h_L} T^R_{h_R} A = h_L A h_R^{-1}$ y $\mathrm{d}A \mapsto \mathrm{d}(h_L A h_R^{-1}) = h_L \mathrm{d}A h_R^{-1}$, por tanto

$$\mathrm{d}L \mapsto h_R \mathrm{d}L h_R^{-1} \,, \quad \mathrm{d}R \mapsto h_L \mathrm{d}R h_L^{-1} \,, \tag{13.29}$$

es decir, $\mathrm{d}L$ es invariante bajo T^L y se transforma como la representación adjunta bajo T^R y análogamente para $\mathrm{d}R$.

Sea $\langle\ ,\ \rangle$ un producto escalar en L_G, y sea X_i una base. El producto escalar está determinado por la matriz $\eta_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, ya que para dos elementos cualesquiera $X = x^i X_i$, $Y = y^i X_i$, se tiene $\langle X, Y \rangle = \eta_{ij} x^i y^j$. Entonces las métricas invariantes por la izquierda o por la derecha en el grupo son de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = \langle \mathrm{d}L, \mathrm{d}L \rangle_L \,, \qquad \mathrm{d}s^2 = \langle \mathrm{d}R, \mathrm{d}R \rangle_R \,, \tag{13.30}$$

respectivamente, donde $\langle\ ,\ \rangle_{L,R}$ son dos productos escalares en L_G. Expresado en componentes, se tiene

$$\mathrm{d}s^2 = g^{L,R}_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \,, \quad g^L_{k\ell} = \eta^L_{ij} \mathscr{L}^i{}_k \mathscr{L}^j{}_\ell \,, \quad g^R_{k\ell} = \eta^R_{ij} \mathscr{R}^i{}_k \mathscr{R}^j{}_\ell \,. \tag{13.31}$$

En notación matricial $g^L = \mathscr{L}^T \eta^L \mathscr{L}$, ídem g^R. Las medidas invariantes asociadas son

$$\mathrm{d}\mu_L = \sqrt{\det(\eta^L)} \det(\mathscr{L}) \mathrm{d}^n x \,, \quad \mathrm{d}\mu_R = \sqrt{\det(\eta^R)} \det(\mathscr{R}) \mathrm{d}^n x \,. \tag{13.32}$$

Las distintas elecciones de $\eta^{L,R}$ sólo cambian la normalización de las medidas invariantes. Una elección particularmente interesante es tomar como producto escalar $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(XY)$ cuando sea definido positivo (en otro caso, g_{ij} no será de Riemann). Con esta elección, la métrica y la medida son invariantes por ambos lados

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{d}L^2) = \mathrm{tr}(A^{-1}\mathrm{d}AA^{-1}\mathrm{d}A) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}AA^{-1}\mathrm{d}AA^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}R^2) \,. \tag{13.33}$$

La medida asociada, con densidad $\sqrt{g}$, es invariante por ambos lados. Si el grupo de matrices no es unimodular tiene que ocurrir que la medida sea 0, ya que no hay una medida biinvariante no trivial, por tanto $g = 0$ y la métrica biinvariante correspondiente es degenerada. Nótese que $\mathscr{L}$ o $\mathscr{R}$ nunca son degeneradas ya que permiten parametrizar un paralelepípedo no degenerado cualquiera, $(A, \mathrm{d}A_1, \ldots, \mathrm{d}A_n)$. Más generalmente se puede tomar $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(\phi(X)\phi(Y))$ donde ϕ es una representación del álgebra. En efecto, denotando también por ϕ la representación correspondiente en el grupo,

$$\exp(\phi(\mathrm{d}L)) = \phi(A^{-1}A\exp(\mathrm{d}L)) = \phi(A^{-1}\exp(\mathrm{d}R)A) = \exp(\phi(A^{-1}\mathrm{d}RA)) \tag{13.34}$$

de donde

$$\mathrm{tr}(\phi(\mathrm{d}L)^2) = \mathrm{tr}((\phi(A)^{-1}\phi(\mathrm{d}R)\phi(A))^2) = \mathrm{tr}(\phi(\mathrm{d}R)^2)\,. \tag{13.35}$$

y define una métrica biinvariante. Se deduce que $\mathrm{tr}(\phi(X)\phi(Y))$ es degenerada, para cualquier elección de ϕ, si el grupo no es unimodular. En particular los grupos semisimples son unimodulares ya que su métrica de Cartan es no degenerada.

Ejemplo. Consideremos el grupo de matrices $A(a,b) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Para este grupo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \begin{pmatrix} e^a\mathrm{d}a & 0 \\ \mathrm{d}b & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ -be^{-a} & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{d}L &= \begin{pmatrix} \mathrm{d}a & 0 \\ -b\mathrm{d}a + \mathrm{d}b & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}R = \begin{pmatrix} \mathrm{d}a & 0 \\ e^{-a}\mathrm{d}b & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{13.36}$$

Como base del álgebra podemos tomar la asociada a estas coordenadas, $\mathrm{d}A|_e = X_a\mathrm{d}a + X_b\mathrm{d}b$,

$$X_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.37}$$

Por tanto $\mathrm{d}L = X_a\mathrm{d}a + X_b(-b\mathrm{d}a + \mathrm{d}b)$ y $\mathrm{d}R = X_a\mathrm{d}a + X_be^{-a}\mathrm{d}b$, es decir,

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \tag{13.38}$$

de donde $\mathrm{d}\mu_L(a,b) = \mathrm{d}a\mathrm{d}b$ y $\mathrm{d}\mu_R(a,b) = e^{-a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$. La métrica biinvariante es

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{d}R^2) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \mathrm{d}a^2 & 0 \\ e^{-a}\mathrm{d}a\mathrm{d}b & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}a^2\,. \tag{13.39}$$

Es decir, $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como este grupo no es unimodular, la métrica es degenerada por lo que define una medida nula. Una métrica invariante por la izquierda no degenerada se obtiene tomando por ejemplo, $\eta = \mathrm{diag}(1,1)$.

$$g_{ij} = \mathscr{L}^T\eta\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d}s^2 = (1+b^2)\mathrm{d}a^2 + \mathrm{d}b^2 - 2b\mathrm{d}a\mathrm{d}b\,. \tag{13.40}$$

Teniendo en cuenta la ley de composición del grupo, $(\alpha,\beta)(a,b)=(a+\alpha,b+\beta e^a)$, es inmediato comprobar la invariancia por la izquierda. Basta probarlo para transformaciones infinitesimales, $(\delta\alpha,\delta\beta)$, usando $\delta a=\delta\alpha$ y $\delta b=e^a\delta\beta$ de donde $\delta\mathrm{d}a=0$ y $\delta\mathrm{d}b=e^a\mathrm{d}a\delta\beta$ y $\delta\mathrm{d}s^2=0$. También se comprueba $\delta\mathrm{d}L=0$. $\diamondsuit$

Muchas de las propiedades de grupos finitos pueden extenderse a los grupos compactos con modificaciones obvias. Sea G un grupo compacto, $\mathrm{d}\mu(x)$ su medida invariante normalizada a 1, es decir, $\int_G \mathrm{d}\mu(x)=1$. Por representación entendemos una representación continua de G en un espacio de Hilbert.

Teorema. Las representaciones de un grupo compacto son equivalentes a unitarias.

En efecto, en grupos compactos se puede definir en forma natural el promedio de una función definida sobre el grupo mediante

$$\langle f\rangle=\int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x)\,, \tag{13.41}$$

y esto permite usar la misma demostración que para grupos finitos, es decir, si T es la representación y (u,v) es el producto escalar original, T es unitaria respecto del producto escalar promediado sobre G

$$(u,v)'=\int_G (T_x u,T_x v)\mathrm{d}\mu(x)\,. \qquad \diamondsuit \tag{13.42}$$

Esto quiere decir que, sin pérdida de generalidad, en el caso de grupos compactos nos podemos restringir a representaciones unitarias.

Teorema. Toda representación unitaria irreducible de un grupo compacto es de dimensión finita.

Nótese que el teorema se refiere a representaciones continuas. De hecho puede probarse que si G no es discreto necesariamente tiene representaciones unitarias de dimensión infinita pero no continuas. También es interesante notar un teorema relacionado para grupos no compactos:

Teorema. Un grupo continuo simple, conexo y no compacto no tiene representaciones unitarias de dimensión finita excepto la representación trivial.

Un grupo continuo simple es todo grupo no abeliano que no tenga subgrupos invariantes propios conexos. Puede tener subgrupos discretos.

Ejemplo. El grupo $(\mathbb{R}^n,+)$ tiene representaciones unitarias unidimensionales, a saber, $u_k(x)=\exp(ikx)$ y es no compacto pero no es simple.

Ejemplo. El grupo de Lorentz $\mathrm{O}(3,1)$ es simple y no compacto luego todas sus representaciones unitarias son de dimensión infinita.

Teorema. Toda representación unitaria de un grupo compacto es suma directa de representaciones unitarias de dimensión finita.

Es decir, las representaciones de grupos compactos son completamente descomponibles.

Las representaciones regulares T^L y T^R actúan en el espacio de Hilbert $L^2(G,\mathrm{d}\mu)$, con producto escalar

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_G \psi_1^*(x)\psi_2(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{13.43}$$

T^L y T^R son continuas y unitarias (y equivalentes entre sí). La misma definición se puede hacer para cualquier grupo unimodular.

Teorema. En la descomposición de la representación regular de un grupo compacto cada representación irreducible aparece con multiplicidad igual a su dimensión.

En particular se sigue que el conjunto de representaciones irreducibles de un grupo compacto es numerable. Denotemos por ν cada una de las representaciones irreducibles, n_ν su dimensión, y $D^\nu(x)$ las matrices de la representación, con elementos de matriz $D^\nu(x)^i{}_j$.

Teorema. (Peter-Weyl.) El conjunto de funciones $Y_{\nu ij}(x) := \sqrt{n_\nu}D^\nu(x)^i{}_j$ forma una base ortonormal de $L^2(G,\mathrm{d}\mu)$.

Este teorema es una generalización de los teoremas de ortogonalidad y completitud de representaciones irreducibles en grupos finitos. Notando que $Y^*_{\nu ij}(x) := \sqrt{n_\nu}D^\dagger_\nu(x)^j{}_i$, la ortonormalidad implica que

$$\int_G D^\dagger_\nu(x)^k{}_i D^\lambda(x)^j{}_\ell \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{n_\nu}\delta^\lambda_\nu \delta^j_i \delta^k_\ell\,, \tag{13.44}$$

y para los caracteres

$$\int_G \chi^\dagger_\nu(x)\chi^\lambda(x)\mathrm{d}\mu(x) = \delta^\lambda_\nu\,. \tag{13.45}$$

La completitud implica que si $\psi \in L^2(G,\mathrm{d}\mu)$

$$\psi(x) = \sum_{\nu,i,j} c^j_{\nu i} D^\nu(x)^i{}_j\,, \qquad c^j_{\nu i} = n_\nu \int_G D^\dagger_\nu(x)^j{}_i \psi(x)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{13.46}$$

La convergencia es en el sentido de la norma (de hecho, uniforme si ψ es continua). Equivalentemente

$$\sum_\nu n_\nu \operatorname{tr}(D^\nu(x_1)D^\dagger_\nu(x_2)) = \delta(x_1,x_2)\,. \tag{13.47}$$

Aquí $\delta(x_1,x_2)$ es la delta de Dirac invariante asociada a la medida invariante $\mathrm{d}\mu(x)$, es decir, tal que

$$\int_G f(x)\delta(x,x')\mathrm{d}\mu(x) = f(x')\,. \tag{13.48}$$

Ejemplo. Para $\mathbb{R}^n$, $\delta(x_1,x_2) = \delta(x_1 - x_2)$ es la delta de Dirac usual.

Ejemplo. La delta de Dirac asociada a la medida invariante normalizada de $\mathrm{SU}(2)$ es

$$\delta(g_1,g_2) = 16\pi^2\delta(\alpha_1-\alpha_2)\delta(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)\delta(\gamma_1-\gamma_2)\,, \tag{13.49}$$

en función de los ángulos de Euler. $\diamondsuit$

Cada conjunto $\{\phi_i^L(x) = Y^*_{\nu i j}(x),\ i = 1,\dots,n_\nu\}$ forma una representación irreducible de clase ν bajo T^L:

$$T^L_g \phi^L_i(x) = \sqrt{n_\nu} D^\dagger_\nu(g^{-1}x)^j{}_i = \sqrt{n_\nu} D^\dagger_\nu(x)^j{}_k D^\nu(g)^k{}_i = D^\nu(g)^k{}_i \phi^L_k(x)\,. \tag{13.50}$$

Estos subespacios son los que aparecen al descomponer T^L. Análogamente $\{\phi_i^R(x) = Y_{\nu j i}(x),\ i = 1,\dots,n_\nu\}$ forma una representación irreducible bajo T^R, $T^R_g \phi^R_i = D^\nu(g)^k{}_i \phi^R_k$.

También se pueden definir operadores pseudoproyectores asociados una representación $T(x)$ de G con las mismas propiedades que para grupos finitos:

$$\begin{aligned} P^j_{\nu i} &= n_\nu \int_G D^\dagger_\nu(x)^j{}_i T(x) \mathrm{d}\mu(x), \\ T(x) &= \sum_{\nu i,j} D^\nu(x)^i{}_j P^j_{\nu i}. \end{aligned} \tag{13.51}$$

Ejemplo. (Ortogonalidad de caracteres de $\mathrm{SU}(2)$.) Dado que $\mathrm{SU}(2)$ es simplemente conexo, sus representaciones irreducibles son univaluadas y se obtienen exponenciando las representaciones irreducibles del álgebra $\mathrm{su}(2)$. El álgebra está formada por J_3 y $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, con relaciones de conmutación

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\,, \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \tag{13.52}$$

Si la representación es unitaria J_i es hermítico y $J_\pm^\dagger = J_\mp$. Por la construcción usual ($\vec{J}^2 = J_\pm J_\mp + J_3(J_3 \mp 1)$ es un operador de Casimir y hermítico) las representaciones irreducibles unitarias son de la forma

$$J_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle\,, \qquad J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j+1\pm m)}\,|j,m\pm 1\rangle\,, \tag{13.53}$$

con $|j,m\rangle$ normalizado. Para que la representación sea unitaria debe ser de dimensión finita y eso implica $2j$ entero no negativo y $m = -j, -j+1, \dots, j$. Cada j etiqueta una representación irreducible. Las matrices de representación son $\exp(-i\psi\hat{n}\vec{J})$ en el espacio subtendido por los $|j,m\rangle$, con j fijo,

$$\exp(-i\psi\hat{n}\vec{J})|j,m\rangle = D^j(\hat{n},\psi)^{m'}{}_m |j,m'\rangle\,. \tag{13.54}$$

En particular $D^j(\psi,\hat{e}_3) = \mathrm{diag}(e^{-i\psi m})$. Dado que las clases de conjugación de $\mathrm{SU}(2)$ están formadas por elementos con el mismo valor de ψ y distinto $\hat{n}$, se tiene que los caracteres de $\mathrm{SU}(2)$ son (usando la identidad $\sum_{n=a}^b x^n = (x^{b+1} - x^a)/(x-1)$)

$$\chi^j(\psi) = \mathrm{tr}(D^j(\psi,\hat{e}_3)) = \sum_{m=-j}^{j} e^{-i\psi m} = \frac{e^{-i(j+1)\psi} - e^{ij\psi}}{e^{-i\psi} - 1} = \frac{\mathrm{sen}((j+\frac{1}{2})\psi)}{\mathrm{sen}(\frac{1}{2}\psi)}\,. \tag{13.55}$$

La ortogonalidad de los caracteres implica

$$\begin{aligned}\delta_{j_1 j_2} &= \int_{\mathrm{SU}(2)} \chi^{j_1}(x)\chi^{j_2}(x)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}((j_1+\frac{1}{2})\psi)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\psi)}\frac{\operatorname{sen}((j_2+\frac{1}{2})\psi)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\psi)}\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\psi)\mathrm{d}\psi.\end{aligned} \tag{13.56}$$

Esta fórmula se comprueba usando la identidad $2\operatorname{sen}((j_1+\frac{1}{2})\psi)\operatorname{sen}((j_2+\frac{1}{2})\psi) = \cos((j_1-j_2)\psi) - \cos((j_1+j_2+1)\psi)$. $\diamondsuit$