**MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014**

**Integral de caminos 3**

20. Un fluido con un campo de velocidades $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ (arrastre) satisface la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad \boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}.$$

Cuando además hay difusión, se aplica la misma ecuación pero el flujo tiene un término extra (ley de Fick)

$$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v} - D\boldsymbol{\nabla}\rho,$$

siendo $D$ el coeficiente de difusión. (Esto se puede deducir de la ecuación diferencial estocástica

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\,dt + d\boldsymbol{w},$$

donde $\boldsymbol{w}$ es una variable aleatoria con densidad de probabilidad $(4\pi Dt)^{-d/2}e^{-\boldsymbol{w}^2/4Dt}$, y $d\boldsymbol{w}$ corresponde a un tiempo $dt$. La ecuación estocástica describe cómo se desplaza un caminante en $(\boldsymbol{x},t)$ en un tiempo $dt$ y $\rho(\boldsymbol{x},t)$ es la densidad de caminantes.)

La ecuación de Schrödinger en tiempo imaginario

$$\partial_t \psi_E(\boldsymbol{x},t) = \frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi_E(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{\hbar}V(\boldsymbol{x})\psi_E(\boldsymbol{x},t)$$

(aquí $t$ denota el tiempo euclídeo) no tiene la forma de una ecuación de continuidad cuando $V \neq 0$ y por tanto no se puede simular directamente mediante una colección de caminantes de los que $\psi_E(\boldsymbol{x},t)$ sería la densidad (a menos que se permita que su número varíe). La normalización de $\psi_E(\boldsymbol{x},t)$, considerada como una densidad, no se conserva.

Sin embargo, la densidad

$$\rho(\boldsymbol{x},t) := \psi_E(\boldsymbol{x},t)\varphi_0(\boldsymbol{x})e^{E_0 t/\hbar}$$

(aquí $\varphi_0(\boldsymbol{x})$ es la función de onda del estado fundamental y $E_0$ la correspondiente energía) es tal que su normalización se conserva (demuéstrese). Demuéstrese también que $\rho(\boldsymbol{x},t)$ sí obedece una ecuación de continuidad, con término de arrastre y término de difusión. Determínese el campo de velocidades $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ asociado.

21. (Principio variacional.) La esperanza matemática de cualquier variable aleatoria satisface la desigualdad de Jensen, $\langle e^x \rangle \geq e^{\langle x \rangle}$. Sean $W_0$ y $W = W_0 + W_1$ dos acciones euclídeas (en $[-T/2, T/2]$ y $T \to +\infty$) que admiten estados fundamentales con energías $E_0$ y $E$, respectivamente, y sea $\langle\ \rangle_0$ el promedio sobre caminos obtenido con peso $e^{-W_0}$ (unidades $\hbar = 1$). Usando $\langle e^{-W_1}\rangle_0 \geq e^{-\langle W_1\rangle_0}$ deducir la siguiente cota variacional: $E \leq E_0 + \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\langle W_1\rangle_0$. En aplicaciones, típicamente $W_0$ es cuadrática con parámetros a optimizar y por tanto $\langle W_1\rangle_0$ es fácilmente calculable. Se obtiene una cota rigurosa, mejor cuanto mejor se elija la acción auxiliar $W_0$.