

## MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014

### Integral de caminos 1

16. Sea

$$Z = \int d^d x e^{-\frac{1}{\hbar} W(x)}$$

un modelo en el que la integral de caminos euclídea se ha sustituido por una integral en  $\mathbb{R}^d$ . La acción tiene la forma

$$W(\mathbf{x}) = W_0 + \frac{1}{2} m_{ij} x^i x^j + \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} g_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n},$$

donde los tensores  $m_{ij}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $g_{ijkl}$ , etc, son completamente simétricos.

- a) En clase se obtuvo la acción efectiva  $\Gamma = -\hbar \log Z$  en un desarrollo semiclásico hasta  $O(\hbar^2)$  inclusive (dos loops) para el caso  $d = 1$ . Se pide el mismo resultado hasta dos loops pero para  $d$  arbitrario.<sup>1</sup> Se puede usar sin demostración que

$$\begin{aligned} \int d^n x e^{-\frac{1}{2} A_{ij} x^i x^j} &= \det(A/(2\pi))^{-1/2}, \\ \langle x^i x^j \rangle &= (A^{-1})^{ij} := S^{ij}, \\ \langle x^i x^j x^k x^l \rangle &= S^{ij} S^{kl} + S^{ik} S^{jl} + S^{il} S^{jk}, \\ \langle x^i x^j x^k x^l x^r x^t \rangle &= S^{ij} S^{kl} S^{rt} + \dots \text{ (15 términos)}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\langle \rangle$  es el promedio con peso  $e^{-\frac{1}{2} A_{ij} x^i x^j}$  y  $A_{ij}$  es simétrica. Expresar  $\Gamma$  en función de  $s^{ij} = (m^{-1})^{ij}$  y  $g_{i_1 \dots i_n}$ . Obviamente el resultado debe reproducir el resultado visto en clase para  $n = 1$ .

- b) Búsquese una interpretación diagramática de los términos con dos loops en la que  $s^{ij}$  es un propagador (línea) y  $g_{i_1 \dots i_n}$  es un vértice de  $n$  puntos (es decir, una  $n$  líneas).
- c) Basándose en diagramas, escribir directamente las contribuciones de tres loops que involucren exactamente dos vértices de tres puntos y otro de cuatro puntos. Los diagramas de  $\Gamma$  son conexos.

---

<sup>1</sup>Para llevar las cuentas de  $\hbar$  se puede reescalar  $x$  por una potencia de  $\hbar$  pero no es práctico aplicar otros reescalamientos dependientes de  $m_{ij}$ . O simplemente notar que  $x = O(\hbar^{1/2})$  para justificar qué términos hay que retener hasta el orden pedido.