MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014

Simetrías 4

12. Sea un subespacio con $P^\mu = (P^0, 0, 0, P^0)$ de una representación de Poincaré con $M^2 = 0$. Probar que a) $W^0 = W^3$ y b) las componentes espaciales de W^μ/P^0 satisfacen las relaciones de conmutación del grupo euclídeo bidimensional. Usar las relaciones de conmutación

$$[W^\mu, W^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha W_\beta.$$

13. Para el grupo de Lorentz, sean $\boldsymbol{J}_R = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - i\boldsymbol{K})$ y $\boldsymbol{J}_L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{K})$. Probar que $\boldsymbol{J}_R$ y $\boldsymbol{J}_L$ forman sendas álgebras de SU(2) y que conmutan entre sí. Se deduce que $\boldsymbol{J}_R^2$ y $\boldsymbol{J}_L^2$ son dos invariantes Lorentz (conmutan con $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{K}$). También $\frac{1}{4}J^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ y $\frac{1}{8}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu\nu}J^{\alpha\beta}$ son invariantes Lorentz. Se pide expresar estos últimos en función de los primeros.[1]

14. Sea la ecuación de Weyl

$$i\partial_t \psi(\boldsymbol{x}, t) = -i\lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi(\boldsymbol{x}, t),$$

donde $\lambda = \pm 1$ es la quiralidad[2] $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli y $\psi(\boldsymbol{x})$ es un biespinor, $\begin{pmatrix} \psi_1(\boldsymbol{x}) \\ \psi_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$. Por tanto el espacio de Hilbert es $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{C}^2$. Esta ecuación es invariante relativista y describe partículas sin masa. Los siguientes operadores satisfacen el álgebra de Poincaré en $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} H &= \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P} = -i\boldsymbol{\nabla}, \\ \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{K} = t\boldsymbol{P} - \frac{1}{2}\{\boldsymbol{x}, H\}. \end{aligned} \tag{1}$$

   a) Verificar explícitamente los conmutadores de H con $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{K}$, de $\boldsymbol{P}$ con $\boldsymbol{K}$, y $\boldsymbol{K}$ con $\boldsymbol{K}$. (Usar $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.)

   b) Verificar que $M^2 = 0$, y mostrar que $W^\mu = \frac{1}{2}\lambda P^\mu$.[3]

---

[1] Notar que para cualquier operador vectorial $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}$ (¿por qué?).

[2] Hay dos ecuaciones de Weyl, una para cada quiralidad. λ toma sólo uno de los dos valores.

[3] Notar que $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{P} = 0$.