MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014

Simetrías 3

9. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos operadores vectoriales. Calculando el conmutador con $\boldsymbol{J}$, verifíquese explícitamente que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ es un escalar bajo rotaciones (es decir, invariante) y $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ es un operador vectorial.

10. La acción del grupo euclídeo en $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}\mapsto R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ se puede realizar mediante matrices reales 3×3, $g(\varphi,\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} R(\varphi) & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ actuando sobre $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ 1\end{pmatrix}$. Se deduce que estos operadores forman directamente una representación del grupo. Se pide calcular los generadores infinitesimales asociados a las coordenadas φ y $\boldsymbol{a}$ en esta representación y verificar las relaciones de conmutación.

11. Sea V el espacio vectorial de funciones de onda $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\psi(x,t)$, que como sabemos lleva una representación (escalar) del grupo de Galileo en $1+1$ dimensiones (una dimensión espacial y otra temporal). Sea ahora $\mathcal{H}$ el subespacio de V formado por las soluciones de la ecuación de Schrödinger de una partícula libre unidimensional de masa m:

$$0=\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t).$$

Para las funciones ψ en $\mathcal{H}$ la dependencia en t es superflua (esta determinada por la ecuación de Schrödinger) de modo que efectivamente $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert de la partícula cuántica (y no V). Como se puede comprobar, la transformación escalar

$$\psi^g(x,t)=\psi(x-vt-a+v\tau,t-\tau)$$

no deja invariante $\mathcal{H}$[1] y por tanto no define una simetría (si lo hiciera no haría falta extensión central del grupo). Compruébese que la transformación

$$\psi^g(x,t)=e^{-i\varphi}\psi(x-vt-a+v\tau,t-\tau),\qquad \varphi(x,t;v,a,\tau)=-mvx+\frac{1}{2}mv^2t,$$

sí deja invariante $\mathcal{H}$ (ésta es una representación proyectiva del grupo de Galileo.) Se pide obtener los generadores infinitesimales y verificar el álgebra de Lie.

[1]Es decir, $\psi\in\mathcal{H}$ no garantiza automáticamente que $\psi^g\in\mathcal{H}$.