MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014

Simetrías 2

6. El grupo euclídeo bidimensional está formado por traslaciones ($\boldsymbol{a}$) y rotaciones (φ) en el plano, $\boldsymbol{x} \to R(\varphi)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$, con $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Como se vió en clase, se puede construir una representación escalar asociada en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Obténgase los correspondientes generadores $\boldsymbol{P}$ y L_z y verifíquese que satisfacen las relaciones de conmutación $[P_i, P_j] = 0$, $[L_z, P_i] = i\epsilon_{ij}P_j$.

7. En $L^2(\mathbb{R}^2)$ sean $P_x = -i\partial_x + \frac{1}{2}By$, $P_y = -i\partial_y - \frac{1}{2}Bx$ (B constante real).

   a) Verificar que estos operadores junto con $L_z = -i(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla})_z$ generan una representación *proyectiva* del grupo euclídeo bidimensional. Para ello comprobar que el álgebra de Lie es la correcta pero con una extensión central.

   b) Para dos traslaciones $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ calcular el cociclo $\omega(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ definido por $U_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = \omega(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})U_{\boldsymbol{a}}U_{\boldsymbol{b}}$ (usar Baker-Campbell-Hausdorff). $U_{\boldsymbol{a}}$ es el operador que representa la translación por $\boldsymbol{a}$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$.

8. La extensión central más general del álgebra de Lie del grupo de rotaciones es

$$[J_i, J_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k + ic_{ij},$$

donde c_{ij} son c-números (operadores múltiplo de la identidad) reales. Reescríbase en la forma

$$\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{J} = i\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{a}.$$

Basándose en Cambell-Hausdorff, explicar porqué la representación construida con $\boldsymbol{J}$ ($U = e^{-i\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{J}}$) es proyectiva. Constrúyase explicítamente un nuevo momento angular $\boldsymbol{J}'$ que produce el mismo efecto físico y tal que satisface el álgebra usual del grupo.