MECÁNICA CUÁNTICA II. 2013-2014

Simetrías 1

1. Como se vio en clase, las matrices

$$B(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = (1-v^2)^{-1/2} \qquad \text{(unidades } c = 1\text{)}$$

describen boosts relativistas de velocidad v en $1+1$ dimensiones.

a) Verificar que forman un grupo y obtener la ley de composición de v.

b) Obtener constructivamente la coordenada normal asociada, $v = \tanh(\xi)$. Para ello, considerar un elemento infinitesimal del grupo y determinar el generador asociado a v, G_v. Después exponenciarlo $\exp(-i\xi G_v)$ y comparar el resultado con $B(v)$ para determinar la relación entre ambas coordenadas.

2. El grupo SU(2) es el grupo formado por las matrices 2×2 unitarias de determinante 1, y corresponde a las matrices de rotación en el espacio de espín 1/2: Su forma general es

$$U(\boldsymbol{a}) = a_0 - i\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3, \quad ||\boldsymbol{a}|| \leq 1, \quad a_0 = \pm\sqrt{1-\boldsymbol{a}^2}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli y $\boldsymbol{a}$ son las tres coordenadas del grupo. Nótese que a_0 no es una coordenada independiente sino una variable auxiliar.

a) Verificar que las matrices de (1) son de SU(2).

b) Obtener la ley de composición de SU(2) en estas coordenadas. Es decir, si $U(\boldsymbol{c}) = U(\boldsymbol{a})U(\boldsymbol{b})$ obtener la función $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. A partir del resultado obtenido ver si el grupo es abeliano.

c) ¿Por qué estas coordenadas $\boldsymbol{a}$ no son normales? Hallar la relación con las coodenadas normales $e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}$.

d) Determinar la función $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a})$ que proporciona las coordenadas del elemento inverso de $U(\boldsymbol{a})$.

La siguiente identidad es útil:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

3. En cierta teoría, la configuración del sistema viene dada por el valor de ϕ, que es una matriz $n \times n$ compleja. Por otro lado, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es el grupo de matrices regulares $n \times n$ complejas; $g \in G$, $g = e^{-i\alpha}$ siendo α una matriz $n \times n$ compleja arbitraria.

   Como acción infinitesimal de G, $\phi \to \phi^g = \phi + \delta\phi$, se postula

   $$\delta\phi = a\delta\alpha\phi + b\phi\delta\alpha \quad \text{(producto de matrices)} \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (a, b \text{ ctes indep. de } \phi \text{ y } \delta\alpha)\,.$$

   Se pide determinar los valores más generales admisibles para las constantes a y b de modo que la variación sea consistente, es decir, se satisfaga $[\delta_1, \delta_2] = \delta_{[1,2]}$ (que garantiza $(\phi^{g_2})^{g_1} = \phi^{(g_1 g_2)}$). Usar la relación $\delta_{[1,2]}\alpha = -i[\delta_1\alpha, \delta_2\alpha]$. Buscar las transformaciones finitas asociadas.

4. El grupo de dilataciones en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de aplicaciones $\boldsymbol{x} \mapsto \lambda\boldsymbol{x}$, $\lambda > 0$. (Nótese que el parámetro λ no es una buena coordenada ya que el neutro debe tener coordenada 0. La coordenada normal es $\xi = \log(\lambda)$. ¿Por qué?)

   Supongamos que en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ (partícula sin espín en n dimensiones) el grupo actúa según

   $$U_\lambda|\boldsymbol{x}\rangle = f(\lambda)|\lambda\boldsymbol{x}\rangle\,,$$

   para cierta función compleja f. De momento no requerimos que este operador sea unitario.

   a) Obtener la acción del grupo sobre la función de onda, $\psi(\boldsymbol{x}) = \langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle$. Usar la relación $|\psi\rangle = \int d^n x\, \psi(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\rangle$. Determinar la acción de $U_\lambda^\dagger$ y U_λ^{-1} sobre la función de onda.

   b) Determinar la forma general de $f(\lambda)$ de modo que U_λ sea una representación del grupo. (Supóngase $f(\lambda)$ analítica en $\lambda = 1$.)

   c) Determinar $f(\lambda)$ de modo que la transformación sea una representación unitaria.

   d) Obtener el generador infinitesimal en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y verificar que es hermítico.

5. Sea $e^C = e^A e^B$, donde A, B y C son operadores. La fórmula de Campbell-Hausdorff proporciona C conocidos A y B, como una serie ordenada por el número de conmutadores del tipo $[A,\ ]$ y $[B,\ ]$. Obtener dicha serie hasta términos con dos conmutadores inclusive mediante cálculo directo. Para ello desarrollar las exponenciales hasta el orden adecuado, multiplicarlas y usar el desarrollo en serie de $\log(1+x)$ (ya que $C = \log(e^A e^B)$) para obtener C. Reagrupar el resultado en forma de conmutadores.[1]

[1] Alternativamente, se puede proponer la forma más general de C con hasta dos conmutadores, con coeficientes indeterminados, desarrollar ambos lados y comprobar que hay solución y única.