MECÁNICA CUÁNTICA II.
Tiempo: de 9:30 a 12:30

1 Simetrías:

Como se vio en clase, la acción de los elementos g de un grupo G sobre los puntos x de una variedad $\mathcal{M}$ ($x \mapsto gx$ de modo que $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$) define una representación escalar (no necesariamente unitaria) de G en $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, d\mu)$ ($d\mu$ es alguna medida definida sobre la variedad): $\psi^g(x) = \psi(g^{-1}x)$.

Sea $G =$ SU(2) y sea $\mathcal{M}$ la esfera unitaria tridimensional contenida en $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \ ||x|| = 1\}$. Los elementos de $\mathcal{M}$ se pueden identificar con los elementos de SU(2) de forma natural mediante $x \in \mathcal{M} \leftrightarrow U(x) \in$ SU(2) con $U(x) = x^0 - i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Esto permite definir una acción de SU(2) sobre $\mathcal{M}$ del siguiento modo (representación regular por la izquierda): Para $g \in$ SU(2) y $x \in \mathcal{M}$, $gx \in \mathcal{M}$ se define mediante la relación

$$U(gx) = gU(x) \quad \text{(producto de matrices)}.$$

a) Para SU(2) usamos coordenadas $g = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{\sigma}}$ y para $\mathcal{M}$ coordenadas $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. ($x^0 := +\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}$ es una variable auxiliar, no una coordenada independiente. Consideramos sólo el hemisferio $x^0 > 0$ de la esfera $\mathcal{M}$.) Demuéstrese que los generadores infinitesimales en $\mathcal{H}$ (es decir, sobre $\psi(x)$) son

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}), \quad \text{con} \quad \boldsymbol{N} = x^0\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}.$$

b) Verifíquese que $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$ satisfacen el álgebra de SO(4):[1]

$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k.$$

Usando estas relaciones, verificar que $\boldsymbol{J}$ satisface el álgebra de SU(2), y que también lo hace $\boldsymbol{J}' := \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{N})$. Muéstrese también que $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{J}'$ conmutan entre sí y que $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{L}$ son ortogonales.

c) Hállese un producto escalar en $\mathcal{H}$, $\int d^3x\rho(\boldsymbol{x})\psi_1^*(\boldsymbol{x})\psi_2(\boldsymbol{x})$, respecto del cual $\boldsymbol{N}$ sea hermítico.[2] Se supone que el soporte de las funciones está contenido en el disco $||\boldsymbol{x}|| < 1$.

d) Una partícula se mueve en $\mathcal{M}$ con hamiltoniano $H = h\boldsymbol{N}^2$, (h es una cte positiva). Usando los resultados previos, deducir los posibles valores de la energía. Exprésese el resultado en función de j y ℓ (números cuánticos asociados a $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{L}$.) Demuéstrese que en el sector con un valor de ℓ dado (onda parcial ℓ) se cumple $E \geq h\ell$.

---

[1] Las dos últimas igualdades se pueden argumentar sin necesidad de cálculo detallado.

[2] Supóngase que el peso $\rho(\boldsymbol{x})$ es invariante bajo rotaciones. Eso garantiza que $\boldsymbol{L}$ también es hermítico.

2 Integral de caminos:

a) Sea una partícula de masa m y carga q restringida a moverse sobre el eje x, sometida a un potencial $q\Phi(x)$ que es independiente del tiempo y periódico con periodo L (es decir, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \Phi(x+nL) = \Phi(x)$) y sea $D(x_1, x_2; t)$ el correspondiente propagador.

Ahora restringimos el movimiento al intervalo $[0, L]$ pero identificando los extremos $x = 0$ y $x = L$ como un mismo punto, de modo la partícula se mueve efectivamente sobre una circunferencia: cuando la partícula, moviéndose hacia la derecha saldría del intervalo por $x = L$, automáticamente entra otra vez por $x = 0$, y lo mismo cuando se mueve hacia la izquierda.[3] Pruébese, usando argumentos de integral de caminos, que ahora el propagador es

$$G(x_1, x_2; t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D(x_1 + nL, x_2; t), \quad x_1, x_2 \in [0, R).$$

b) Se añade un potencial vector constante A paralelo al eje x ($\vec{A} = (A, 0, 0)$). Pruébese que en este caso el propagador es

$$G(x_1, x_2; t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{qA}{\hbar c}(x_1 - x_2 + nL)} D(x_1 + nL, x_2; t), \quad x_1, x_2 \in [0, R).$$

c) El resultado anterior es aplicable al caso $\Phi(x) = 0$ (A no necesariamente nulo) para el cual $D(x_1, x_2; t)$ es conocido: escríbase el propagador $G(x_1, x_2; t)$ correspondiente. Reexpresar dicho propagador mediante la fórmula de resumación de Poisson:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(an+b) = \frac{1}{|a|}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i k b}{a}} \tilde{f}(\frac{2\pi k}{a}), \qquad \tilde{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx,$$

y a partir del ahí obténganse el espectro de energías y las funciones de onda.

d) Verifíquese que usando el formalismo canónico se obtienen los mismos resultados para el espectro y las funciones de onda normalizadas propias del hamiltoniano.

[3] x pasa a ser una variable angular definida mód L: cuando la partícula recorre una distancia L vuelve al mismo punto por definición. Se trata de una circunferencia topológica. Localmente y cinemáticamente no se distingue de una recta. No consideramos efectos de curvatura, ni fuerzas virtuales (centrífugas, etc).