MECÁNICA CUÁNTICA II. 2010-2011

Tiempo: de 16:30 a 20:00

1. En $L^2(\mathbb{R}^2)$ sean $P_x = -i\partial_x + \frac{1}{2}By$, $P_y = -i\partial_y - \frac{1}{2}Bx$ (B constante). a) Verificar que estos operadores junto con el L_z usual generan una representación proyectiva del grupo euclídeo bidimensional (traslaciones y rotaciones en el plano). Para ello comprobar que el álgebra de Lie es la correcta pero con una extensión central. b) Para dos traslaciones $\vec{a}$ y $\vec{b}$ calcular el cociclo $\omega(\vec{a},\vec{b})$ definido por $U_{\vec{a}+\vec{b}} = \omega(\vec{a},\vec{b})U_{\vec{a}}U_{\vec{b}}$. (Por ejemplo usar Baker-Campbell-Hausdorff.)

2. Una partícula cargada que se mueve en un plano está sometida a un campo magnético uniforme y constante perpendicular al plano. En cierto gauge que respeta invariancia rotacional explícita, el propagador exacto es ($T = t_b - t_a$, $\omega = qB/mc$ es la frecuencia ciclotrón)
$$\begin{aligned}\langle \vec{r}_b, t_b | \vec{r}_a, t_a \rangle &= \frac{m\omega}{4\pi i\hbar \operatorname{sen}(\omega T/2)} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}\left(\frac{1}{2}\cot(\omega T/2)\left[(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right] + x_a y_b - x_b y_a\right)\right].\end{aligned}$$
El espectro de energías (niveles de Landau) es discreto pero cada estado está infinitamente degenerado (¿cómo se ve eso usando el propagador?). Se pide: a) Determinar la energía de los estados fundamentales. b) Determinar la función de onda normalizada del estado fundamental con momento angular cero.

3. Sean η_1, η_2 dos generadores de Grassmann. Definimos dos nuevos generadores ξ_1, ξ_2 mediante el siguiente cambio de variable no lineal:
$$\xi_1 = \eta_1 + \alpha_1\eta_1\eta_2, \quad \xi_2 = \eta_2 + \alpha_2\eta_1\eta_2,$$
donde $\alpha_{1,2}$ son variables impares de Grassman. Verificar que el cambio es invertible y que cumple $[\xi_i, \xi_j]_+ = 0$. Se trata de encontrar el jacobiano del cambio de variable. Es decir, encontrar la función $J(\eta_1,\eta_2) = J_0 + J_1\eta_1 + J_2\eta_2 + J_{12}\eta_1\eta_2$, tal que
$$\int d\xi_1 d\xi_2 f(\xi) = \int d\eta_1 d\eta_2 J(\eta) f(\xi(\eta))$$
para una función $f(\xi_1,\xi_2)$ cualquiera. Obviamente $J(\eta)$ debe ser par (¿por qué?) y por tanto $J_{1,2}$ deben ser impares.

4. Sea un sistema de bosones con la siguiente interacción (que no conserva N, $\mu = 0$)
$$V = \frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\left(V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta a^\dagger_\gamma a_\delta + V^*_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\dagger_\delta a_\gamma a_\beta a_\alpha\right).$$
$V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es simétrico respecto de los tres primeros índices. La primera contribución perturbativa no nula a Z es de orden dos. Se pide: a) Calcular dicha contribución usando Wick. b) Reproducir el mismo resultado con diagramas de Feynman (hay dos diagramas). Los vértices correspondientes son puntos en los que entra una flecha y salen tres o al revés. Identificar la regla de Feynman asociada a dichos vértices.