**Mecánica Cuántica II**

Tiempo: de 16:30 a 17:30

**HACER SÓLO 5 PREGUNTAS**

**1.** El álgebra de Lie del grupo de rotaciones con una extensión central puede escribirse como

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\vec{J} + i\vec{a}$$

donde $\vec{J}$ es el generador infinitesimal de las rotaciones y $\vec{a}$ es un c-número (operador múltiplo de la identidad). Explicar porqué esta representación sería proyectiva y explicar en qué sentido esta extensión es trivial.

**2.** Sea $G$ un grupo de transformaciones en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \vec{x} & \mapsto & g\vec{x} \end{array}$$

Construir la correspondiente representación de $G$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones de onda $\psi(\vec{x})$ (y comprobar que en efecto es representación)

$$\begin{array}{rccc} g \mapsto U(g): & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & \psi(\vec{x}) & \mapsto & \psi^g(\vec{x}) = \ ? \end{array}$$

**3.** Como se vio en clase, la medida

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p})$$

es invariante Lorentz eligiendo la función $f(\vec{p})$ adecuadamente. Determinar $f$ explícitamente, usando la propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(h(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|h'(x_0)|}$$

(siendo $x_0$ el único cero de $h(x)$ en la zona de integración).

**4.** Verificar que $\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)$ es un pseudo vector Lorentz.

**5.** Un sistema de $N$ partículas no relativistas interactúan a través de un potencial $V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$. Escribir el propagador $\langle \vec{x}_{1,f}, \ldots, \vec{x}_{N,f}, t_f | \vec{x}_{1,i}, \ldots, \vec{x}_{N,i}, t_i \rangle$ mediante integral de caminos (no se pide deducir la fórmula).

**6.** Si el lagrangiano $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ es a lo sumo cuadrático

$$G(\vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i) = G_{\rm cl}(\vec{x}_f, t_f | \vec{x}_i, t_i) G_2(\vec{0}, t_f | \vec{0}, t_i)\,.$$

Explicar esta fórmula e indicar cómo se obtiene.

**Mecánica Cuántica II**

Tiempo: de 17:30 a 19:30

**1.** Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert de cierta partícula cuántica cuyas funciones de onda son del tipo $\psi(\vec{r})$, donde $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ y $\psi$ un biespinor $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. El sistema tiene simetría relativista y se sabe que los operadores $\vec{P}$ (momento) y $\vec{K}$ (generador de los boosts) son

$$\vec{P} = -i\vec{\nabla}, \qquad \vec{K} = \alpha\,\hat{\vec{r}}\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}) + \beta\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\,\hat{\vec{r}}$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ dos constantes desconocidas y $\hat{\vec{r}}$ el operador posición. (Notar que $\vec{\nabla}$, $\hat{\vec{r}}$ y $\vec{\sigma}$ son operadores multiplicados en distintos órdenes actuando sobre $\psi$, que $\vec{\nabla}$ y $\hat{\vec{r}}$ no conmutan entre sí pero si con $\vec{\sigma}$, y que las componentes de $\vec{\sigma}/2$ tienen las relaciones de conmutación de un momento angular.)

Teniendo en cuenta que los generadores $H$, $\vec{P}$, $\vec{J}$ y $\vec{K}$ deben cumplir las relaciones de conmutación del grupo de Poincaré, se pide obtener la forma concreta de $\vec{K}$ (es decir, determinar $\alpha$ y $\beta$) así como de $H$ y $\vec{J}$. (Hay dos soluciones). Determinar también la masa y el espín de la partícula.

**2.** Consideremos una partícula browniana undimensional que a nivel microscópico se mueve por saltos aleatorios $\Delta x = \pm\Delta/2$ cada $\Delta t = \epsilon/2$. Sin embargo a diferencia del caso visto en clase, esta partícula se mueve con probabilidad $Q_+ = 1/2 + q$ hacia la derecha y probalidad $Q_- = 1/2 - q$ hacia la izquierda, donde $q \in [-1/2, 1/2]$ es un parámetro.

Obtener la ecuación de evolución de la densidad macroscópica $\rho(x,t)$ en el límite del continuo $\epsilon \to 0$. En particular determinar cómo deben escalar los parámetros $\Delta$ y $q$ en este límite, $\Delta \sim \epsilon^\alpha$, $q \sim \epsilon^\beta$, con $\alpha, \beta =$?

Se puede usar el método visto en clase (escribir una recurrencia que relacione $p(j,N)$ con $p(j,N-2)$ y $p(j\pm 2, N-2)$ que se reduce a una ecuación diferencial en el límite del continuo).